УДК 621.396:681.323

С. И. Зиатдинов, Ю. В. Соколова
*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения*

# Синтез комплексных дискретных фильтров

*Рассмотрена методика синтеза нерекурсивных комплексных дискретных фильтров на основе инвариантной переходной характеристики, а также синтеза рекурсивных комплексных дискретных фильтров на основе инвариантной импульсной характеристики и билинейного z-преобразования. Синтезированные комплексные фильтры содержат два квадратурных канала, позволяющие изменять частоту настройки фильтра, что делает их весьма эффективными при создании адаптивных и когерентных систем обработки информации. Приведены примеры построения комплексных дискретных фильтров.*

**Комплексные нерекурсивные и рекурсивные фильтры, импульсные и переходные характеристики, комплексные весовые коэффициенты, разностные уравнения**

Одной из основных процедур при обработке информации является фильтрация сигналов фильтрами нижних и верхних частот, полосовыми и режекторными. Частотные свойства фильтра определяются конкретной задачей. В ряде случаев применяются адаптивные комплексные фильтры, параметры которых могут изменяться в зависимости от спектральных характеристик обрабатываемых сигналов [1]. В комплексных фильтрах управлять средней частотой передаточной функции значительно проще, чем в действительных фильтрах.

В настоящее время получила широкое распространение цифровая обработка сигналов на базе персональных компьютеров или специализированных вычислителей. При этом непрерывные фильтры преобразуются в дискретные. Методика синтеза дискретных фильтров по их непрерывным аналогам достаточно хорошо отработана.

Синтез дискретных фильтров выполняется в частотной либо во временной области. При синтезе дискретных фильтров в частотной области [2] с минимальными погрешностями воспроизводятся амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и фазочастотные характеристики (ФЧХ) непрерывных фильтров. Преобразование частотной передаточной функции непрерывного фильтра в частотную передаточную функцию дискретного фильтра осуществляется на базе билинейного $z$-преобразования. описанная методика в основном используется для создания фильтров верхних частот и режекторных фильтров.

При синтезе дискретных фильтров во временно́й области применяется метод инвариантной импульсной или переходной характеристики, согласно которому отсчеты импульсной или переходной характеристики непрерывного фильтра используются для вычисления коэффициентов линейного разностного уравнения дискретного фильтра [3]–[6].

В настоящей статье рассмотрен синтез комплексных нерекурсивных и рекурсивных дискретных фильтров на основе метода инвариантных импульсной и переходной характеристик и $z$-преобразования.

**Синтез нерекурсивных комплексных дискретных фильтров методом инвариантной импульсной характеристики.** Согласно [7] комплексный фильтр обладает комплексной импульсной характеристикой

$$\dot{h}_{\text{н}}(t) = h_{\text{н}}(t) e^{j\omega_0 t}, \tag{1}$$

где $h_{\text{н}}(t)$ – импульсная характеристика непрерывного действительного фильтра; $\omega_0$ – средняя частота АЧХ (частота настройки) фильтра.

Выделив в (1) квадратурные компоненты, получим:

$$\dot{h}_{\text{н}}(t) = h_x(t) + jh_y(t), \tag{2}$$

где $h_x(t) = h_{\text{н}}(t)\cos(\omega_0 t)$, $h_y(t) = h_{\text{н}}(t)\sin(\omega_0 t)$ – квадратурные (комплексно-сопряженные) составляющие импульсной характеристики.

Для комплексных дискретных фильтров импульсная характеристика представляется последовательностью масштабированных отсчетов комплексной импульсной характеристики непрерывного фильтра:

$$\dot{h}(t_i) = T\dot{h}_{\text{н}}(t_i) = Th_x(t_i) + jTh_y(t_i),$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots$ – номер отсчета импульсной характеристики; $t_i = iT$ – текущее дискретное время;

 

$T$ – период следования отсчетов комплексных входного и выходного сигналов дискретного фильтра.

Выходной сигнал комплексного дискретного фильтра определяется дискретной сверткой квадратурных отсчетов $x[i]$, $y[i]$ обрабатываемого комплексного входного сигнала $z_{\text{вх}}[i] = x[i] + jy[i]$ и отсчетов комплексной импульсной характеристики $\dot{h}(t)$ фильтра:

$$z_{\text{вых}}[k] = \sum_{i=0}^{n} z_{\text{вх}}[k-i]\dot{h}[i],$$

где $n$ – порядок фильтра.

С учетом (2) получим:

$$z_{\text{вых}}[k] = \sum_{i=0}^{n}\left\{x_{\text{вх}}[k-i]h_x[i] - y_{\text{вх}}[k-i]h_y[i]\right\} + \\ + j\sum_{i=0}^{n}\left\{x_{\text{вх}}[k-i]h_y[i] - y_{\text{вх}}[k-i]h_x[i]\right\}. \qquad (3)$$

Порядок фильтра определяется из условия выполнения соотношения $nT > t_{\text{пер}}$, где $t_{\text{пер}}$ – длительность переходного процесса в фильтре.

Выражение (3) запишем следующим образом:

$$z_{\text{вых}}[k] = \sum_{i=0}^{n}\left\{a_{xi}x_{\text{вх}}[k-i] - a_{yi}y_{\text{вх}}[k-i]\right\} + \\ + j\sum_{i=0}^{n}\left\{a_{yi}x_{\text{вх}}[k-i] + a_{xi}y_{\text{вх}}[k-i]\right\},$$

где квадратурные составляющие комплексных весовых коэффициентов $\dot{a}_i = a_{xi} + ja_{yi}$ составляют $a_{xi} = h_x[i]$; $a_{yi} = h_y[i]$.

Синтез нерекурсивного комплексного дискретного фильтра заданного порядка $n$ заключается в определении постоянных коэффициентов $a_{xi}$ и $a_{yi}$, определяющих вид частотной, импульсной и переходной характеристик фильтра.

Основой схемы рассматриваемого нерекурсивного комплексного дискретного фильтра $n$-го порядка (рис. 1) является набор линий задержек соответствующих отсчетов сигнала на время $T$. Фильтр включает 2 квадратурных канала, в каждом из которых осуществляется взвешенное суммирование отсчетов квадратурных составляющих комплексного входного сигнала.

В качестве примера рассмотрим комплексный дискретный полосовой фильтр второго порядка на основе фильтра нижних частот Баттерворта второго порядка. Согласно [7] частотная передаточная функция такого фильтра имеет вид

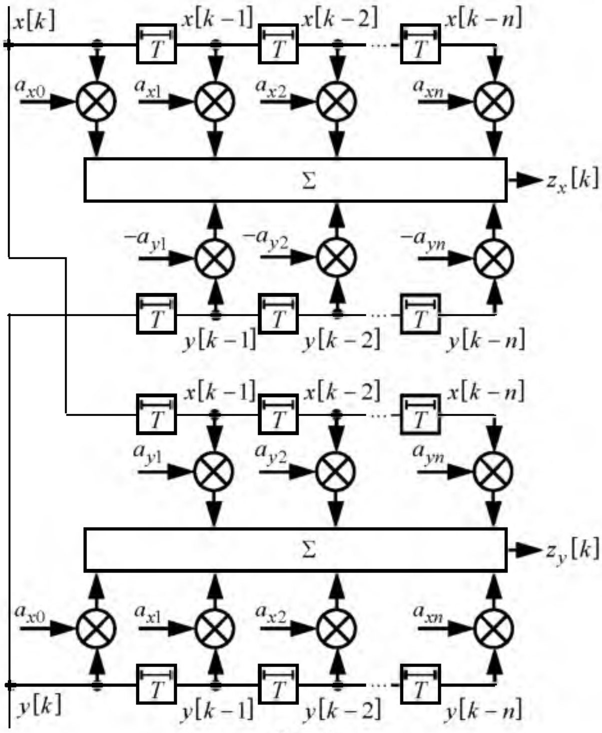

*Рис. 1*

$$W(j\omega) = \frac{\omega_{\text{ср}}^2}{\left[j(\omega-\omega_0)\right]^2 + j\sqrt{2}\omega_{\text{ср}}(\omega-\omega_0) + \omega_{\text{ср}}^2},$$

а комплексная импульсная характеристика:

$$\dot{h}(t) = \sqrt{2}\omega_{\text{ср}}e^{-\frac{\omega_{\text{ср}}t}{\sqrt{2}}} \times \\ \times \sin\left(\frac{\omega_{\text{ср}}t}{\sqrt{2}}\right)\left[\cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)\right],$$

где $\omega_{\text{ср}}$ – частота среза.

При этом весовые коэффициенты комплексного дискретного фильтра определяются следующим образом:

$$a_{xi} = \sqrt{2}\omega_{\text{ср}}e^{-\frac{\omega_{\text{ср}}iT}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{\omega_{\text{ср}}iT}{\sqrt{2}}\right)\cos(\omega_0 iT);$$

$$a_{yi} = \sqrt{2}\omega_{\text{ср}}e^{-\frac{\omega_{\text{ср}}iT}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{\omega_{\text{ср}}iT}{\sqrt{2}}\right)\sin(\omega_0 iT).$$

**Синтез нерекурсивных комплексных дискретных фильтров методом инвариантной переходной характеристики.** При обнаружении и оценивании параметров сигналов; построении и исследовании когерентных систем автоматического слежения по дальности, скорости и угловым координатам; подтверждении моделированием результатов теоретических исследований требуется достаточно точное воспроизведение переходных характеристик непрерывных фильтров-аналогов.

В задачах обнаружения и оценивания параметров импульсных сигналов результат обработки прямоугольных видеоимпульсов на выходе амплитудного или фазового детектора является переходной характеристикой сглаживающего фильтра. При этом отклонение переходной характеристики дискретного фильтра от переходной характеристики используемой модели непрерывного фильтра-аналога нежелательно.

Качество разнообразных систем автоматического слежения принято оценивать по переходным характеристикам, что невозможно без максимально точного совпадения переходных характеристик непрерывных моделей и дискретных систем.

Кроме того, инвариантную импульсную характеристику нельзя использовать для синтеза дискретных фильтров верхних частот и, следовательно, полосовых и режекторных дискретных фильтров. Эта проблема полностью снимается при использовании метода инвариантной переходной характеристики [5]. В связи с этим рассмотрим вопрос синтеза комплексных нерекурсивных дискретных фильтров на основе указанной характеристики.

В общем виде выходной сигнал комплексного фильтра находится с помощью известного интеграла наложения [8]:

$$z_{\text{вых}}(t) = \int_0^t z_{\text{вх}}(t-\tau)\dot{h}_{\text{н}}(\tau)\,d\tau, \qquad (4)$$

причем комплексная импульсная характеристика $\dot{h}_{\text{н}}(t)$ является производной комплексной переходной характеристики фильтра $\dot{g}_{\text{н}}(t)$ [7]:

$$\dot{h}_{\text{н}}(t) = \frac{d\dot{g}_{\text{н}}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\dot{g}_{\text{н}}(t) - \dot{g}_{\text{н}}(t-\Delta t)}{\Delta t}.$$

Выделим аналогично (2) квадратурные составляющие комплексной переходной характеристики:

$$\dot{g}_{\text{н}}(t) = g_x(t) + jg_y(t);$$

$$g_x(t) = \int_0^t h_{\text{н}}(\tau)\cos(\omega_0\tau)\,d\tau; \qquad (5)$$

$$g_y(t) = \int_0^t h_{\text{н}}(\tau)\sin(\omega_0\tau)\,d\tau. \qquad (6)$$

В результате выражение для комплексного выходного сигнала (4) примет вид

$$z_{\text{вых}}(t) \approx \int_0^t z_{\text{вх}}(t-\tau)\frac{\dot{g}_{\text{н}}(\tau) - \dot{g}_{\text{н}}(\tau-\Delta\tau)}{\Delta\tau}\,d\tau. \quad (7)$$

Будем считать, что за время $\Delta\tau$ не происходит заметных изменений переходной характеристики. Тогда, положив $\Delta\tau = T$ и заменив интеграл в (7) суммой, получим в дискретном виде:

$$z_{\text{вых}}[k] = \sum_{i=0}^{n}\left\{z_{\text{вх}}[k-i]\left(\dot{g}_{\text{н}}[i] - \dot{g}_{\text{н}}[i-1]\right)\right\} = \sum_{i=0}^{n}\left(z_{\text{вх}}[k-i]\,\dot{g}_{\text{н}}[i]\right),$$

где $\Delta\dot{g}_{\text{н}}[i] = \dot{g}_{\text{н}}[i] - \dot{g}_{\text{н}}[i-1]$ – приращение переходной характеристики за период $T$.

Запишем соотношения (5), (6) в дискретной форме:

$$g_x[k] = \sum_{i=0}^{k} h_x[i] = T\sum_{i=0}^{k}\left\{h_{\text{н}}[i]\cos(\omega_0 iT)\right\};$$

$$g_y[k] = \sum_{i=0}^{k} h_y[i] = T\sum_{i=0}^{k}\left\{h_{\text{н}}[i]\sin(\omega_0 iT)\right\}.$$

Тогда

$$\Delta\dot{g}_{\text{н}}[i] = \Delta g_x[i] + j\Delta g_y[i] = \left(g_x[i] - g_x[i-1]\right) + j\left(g_y[i] - g_y[i-1]\right).$$

С учетом последнего выражения выходной сигнал комплексного фильтра представляется следующим образом:

$$z_{\text{вых}}[k] = \sum_{i=0}^{n}\left(x_{\text{вх}}[k-i]\Delta g_x[i] - y_{\text{вх}}[k-i]\Delta g_y[i]\right) + j\sum_{i=0}^{n}\left(x_{\text{вх}}[k-i]\Delta g_y[i] + y_{\text{вх}}[k-i]\Delta g_x[i]\right).$$

Окончательно имеем:

$$z_{\text{вых}}[k] = \sum_{i=0}^{n}\left\{\left(a_{xi}x_{\text{вх}}[k-i] - a_{yi}y_{\text{вх}}[k-i]\right) + j\left(a_{yi}x_{\text{вх}}[k-i] + a_{xi}y_{\text{вх}}[k-i]\right)\right\},$$

где $a_{xi} = \Delta g_x[i]$; $a_{yi} = \Delta g_y[i]$ – весовые коэффициенты нерекурсивного фильтра (см. рис. 1).

**Синтез рекурсивных комплексных дискретных фильтров методом инвариантной импульсной характеристики.** В общем виде передаточная функция рекурсивного комплексного дискретного фильтра записывается следующим образом [2]:

$$W(z) = \frac{a_0 + a_1 z_0 z^{-1} + a_2 z_0^2 z^{-2} + \ldots + a_n z_0^n z^{-n}}{1 + b_1 z_0 z^{-1} + b_2 z_0^2 z^{-2} + \ldots + b_n z_0^n z^{-n}} =$$

$$=\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i z_0^i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{n} b_i z_0^i z^{-i}}, \qquad (8)$$

где $a_i$, $b_i$ – постоянные коэффициенты, соответствующие дискретному действительному фильтру при $\omega_0 = 0$; $z_0 = e^{j\omega_0 T}$; $z = e^{-j\omega T}$.

Для передаточной функции (8) запишем разностное уравнение, определяющее алгоритм работы дискретного фильтра:

$$\begin{aligned} z_{\text{вых}}[k] &= a_0 z_{\text{вх}}[k] + a_1 z_0 z_{\text{вх}}[k-1] + \\ &+ a_2 z_0^2 z_{\text{вх}}[k-2] + \ldots + a_n z_0^n z_{\text{вх}}[k-n] - \\ &- b_1 z_0 z_{\text{вых}}[k-1] - b_2 z_0^2 z_{\text{вых}}[k-2] - \ldots \\ &\ldots - b_n z_0^n z_{\text{вых}}[k-n] = \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i z_0^i z_{\text{вх}}[k-i] - \sum_{i=1}^{n} b_i z_0^i z_{\text{вых}}[k-i]. \end{aligned} \qquad (9)$$

Введем обозначения для комплексных весовых коэффициентов:

$$\dot{a}_0 = a_0 z_0^0;\ \dot{a}_1 = a_1 z_0;\ \dot{a}_2 = a_2 z_0^2;\ \ldots,\ \dot{a}_n = a_n z_0^n;$$
$$\dot{b}_1 = b_1 z_0;\ \dot{b}_2 = b_2 z_0^2;\ \ldots,\ \dot{b}_n = b_n z_0^n.$$

Тогда разностное уравнение примет следующий вид:

$$z_{\text{вых}}[k] = \sum_{i=0}^{n} \dot{a}_i z_{\text{вх}}[k-i] - \sum_{i=1}^{n} \dot{b}_i z_{\text{вых}}[k-i]. \qquad (10)$$

Как и в случае нерекурсивного комплексного фильтра, синтез рекурсивного комплексного фильтра при заданном порядке $n$ заключается в выборе весовых коэффициентов $\dot{a}_i$ и $\dot{b}_i$ в разностном уравнении (9) так, чтобы частотные свойства дискретного фильтра и непрерывного фильтра-аналога максимально совпадали.

Согласно критерию инвариантной импульсной характеристики необходимо, чтобы импульсные характеристики непрерывного и дискретного фильтров совпадали. Тогда коэффициенты разностного уравнения определяются следующим образом [3]:

$$a_0 = T h_{\text{н}}[0];\quad a_k = T\left(h_{\text{н}}[k] + \sum_{i=1}^{k} b_i h_{\text{н}}[k-i]\right); \qquad (11)$$

$$-\sum_{i=1}^{n} b_i h_{\text{н}}[n+k-i] = h_{\text{н}}[n+k],\quad k=\overline{1,n}. \qquad (12)$$

Коэффициенты $b_i$ находят решая систему уравнений (12), коэффициенты $a_i$ – последовательными вычислениями по формулам (11).

Схема рекурсивного комплексного дискретного фильтра $n$-го порядка приведена на рис. 2. Фильтр содержит 2 рекурсивных квадратурных канала, в каждом из которых осуществляется

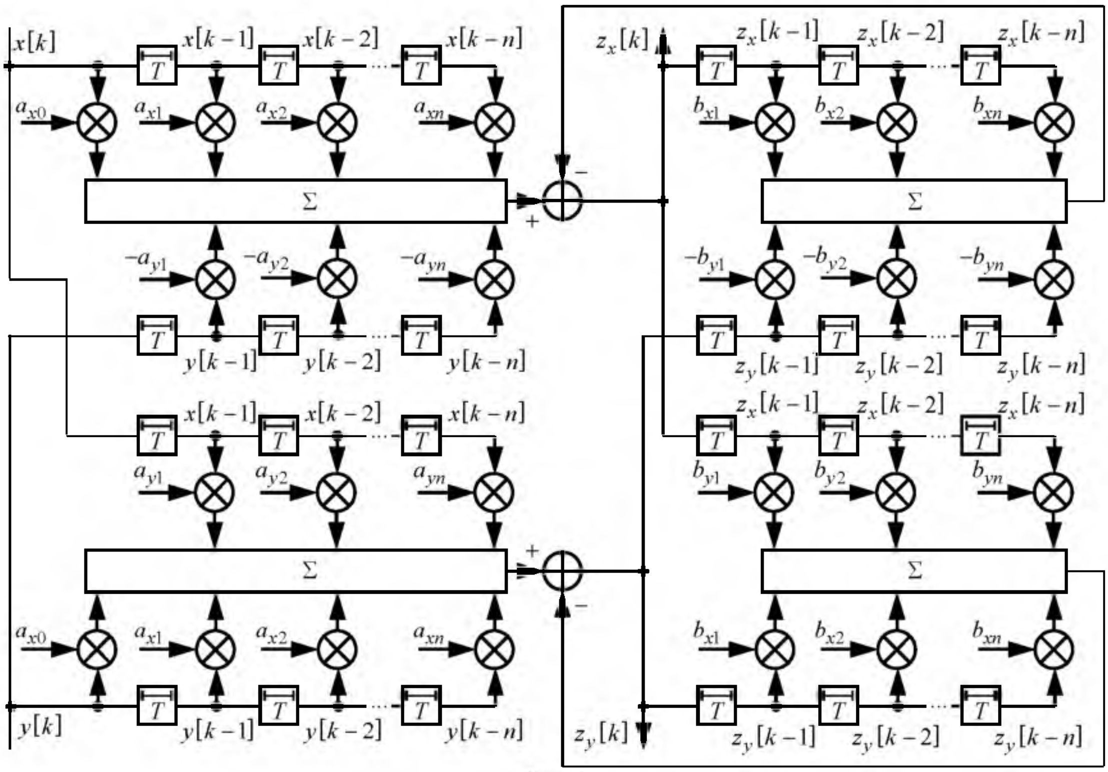


Рис. 2

взвешенное суммирование отсчетов квадратурных составляющих комплексного входного сигнала.

*Пример.* Рассмотрим комплексный полосовой фильтр, синтезированный на основе фильтра нижних частот Баттерворта первого порядка. Частотная передаточная функция комплексного полосового фильтра имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega - \omega_0)/\omega_{\text{ср}}}; \qquad (13)$$

его импульсная характеристика:

$$\dot{h}_{\text{н}}(t) = \omega_{\text{ср}} e^{-\frac{\omega_{\text{ср}} t}{\sqrt{2}}} \left[\cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)\right]. \qquad (14)$$

Коэффициенты разностного уравнения (9) имеют вид

$$a_0 = T h_{\text{н}}[0]; \quad a_1 = T\left\{h_{\text{н}}[1] - \left(h_{\text{н}}[2]/h_{\text{н}}[1]\right) h_{\text{н}}[0]\right\};$$
$$b_1 = -h_{\text{н}}[2]/h_{\text{н}}[1].$$

С учетом (13), (14) при $\omega_0 = 0$ получим $a_0 = \omega_{\text{ср}} T$; $a_1 = 0$; $b_1 = -e^{-\omega_{\text{ср}} T}$. Весовые коэффициенты комплексного фильтра имеют вид

$$a_0 = \omega_{\text{ср}} T; \quad a_1 = 0;$$
$$\dot{b}_1 = -e^{-\omega_{\text{ср}} T}\left[\cos(\omega_0 T) + j\sin(\omega_0 T)\right].$$

Тогда согласно (10) разностное уравнение фильтра записывается следующим образом:

$$z_{\text{вых}}[k] = a_0 z_{\text{вх}}[k] - b_1 z_0 z_{\text{вых}}[k-1].$$

**Синтез рекурсивных комплексных дискретных фильтров методом инвариантной переходной характеристики.** Для случая, когда входной сигнал является комплексной единичной ступенчатой функцией, на основании (10) запишем систему разностных уравнений, связывающих отсчеты комплексных входного и выходного сигналов рекурсивного дискретного фильтра, а также коэффициентов $\dot{a}_i$ и $\dot{b}_i$:

$$\dot{g}[k] = \sum_{i=0}^{n} \dot{a}_i - \sum_{i=1}^{n} \dot{b}_i \dot{g}[k-i].$$

В данном соотношении комплексные весовые коэффициенты записываются в виде $\dot{a}_i = a_i z_0^i$; $\dot{b}_i = b_i z_0^i$.

В рассматриваемой задаче для синтеза комплексного рекурсивного фильтра отсчеты $\dot{g}[i]$ переходной характеристики дискретного фильтра приравняем к отсчетам $\dot{g}_{\text{н}}[i]$ переходной характеристики непрерывного фильтра $\dot{g}[i] = \dot{g}_{\text{н}}[i]$.

При этом согласно [5] весовые коэффициенты $a_i$ и $b_i$ находятся из решения следующей системы уравнений при $\omega_0 = 0$:

$$\begin{cases} a_1 - b_1 g_{\text{н}}[0] = g_{\text{н}}[1] - g_{\text{н}}[0]; \\ a_1 + a_2 - b_1 g_{\text{н}}[1] - b_2 g_{\text{н}}[0] = g_{\text{н}}[2] - g_{\text{н}}[0]; \\ a_1 + a_2 + a_3 - b_1 g_{\text{н}}[2] - b_2 g_{\text{н}}[1] - b_3 g_{\text{н}}[0] = \\ \qquad = g_{\text{н}}[3] - g_{\text{н}}[0]; \\ \ldots \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n - b_1 g_{\text{н}}[m-1] - b_2 g_{\text{н}}[m-2] - \\ \qquad - \ldots - b_n g_{\text{н}}[m-n] = g_{\text{н}}[m] - g_{\text{н}}[0], \end{cases} \qquad (15)$$

где $m = k + n$; $k = 0, 1, \ldots$.

Система (15) содержит $m = 2n$ уравнений, что позволяет определить все необходимые коэффициенты разностного уравнения синтезируемого рекурсивного дискретного фильтра. Для этого перепишем систему уравнений (15) в виде

$$\begin{cases} x_1 + x_{n+1} g_{\text{н}}[0] = d_1; \\ x_1 + x_2 + x_{n+1} g_{\text{н}}[1] + x_{n+2} g_{\text{н}}[0] = d_2; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_{n+1} g_{\text{н}}[2] + x_{n+2} g_{\text{н}}[1] + \\ \qquad + x_{n+3} g_{\text{н}}[0] = d_3; \\ \ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} g_{\text{н}}[m-1] + \\ + x_{n+2} g_{\text{н}}[m-2] + \ldots + x_{n+n} g_{\text{н}}[m-n] = \\ \qquad = d_m[m], \end{cases} \qquad (16)$$

где $x_1 = a_1$; $x_2 = a_2$; …; $x_n = a_n$; $x_{n+1} = -b_1$; $x_{n+2} = -b_2$; …; $x_{n+n} = -b_n$; $d_1 = g_{\text{н}}[1] - g_{\text{н}}[0]$; $d_2 = g_{\text{н}}[2] - g_{\text{н}}[0]$; …; $d_m = g_{\text{н}}[m] - g_{\text{н}}[0]$.

Система уравнений (16) решается в приложении Matlab с помощью функции $x = [\text{pinv}(A)]\mathbf{d}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1\ 0 \cdots 0 & g_{\text{н}}[0] & 0 & \cdots & 0 \\ 1\ 1 \cdots 0 & g_{\text{н}}[1] & g_{\text{н}}[0] & \cdots & \vdots \\ \vdots\ \vdots\ \ddots\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1\ 1 \cdots 1 & g_{\text{н}}[m-1] & g_{\text{н}}[m-2] & \cdots & g_{\text{н}}[m-n] \end{pmatrix} \qquad (17)$$

– матрица;

$$\mathbf{d} = (d_1 \quad d_2 \quad \ldots \quad d_m)^{\text{T}} \qquad (18)$$

– вектор-столбец.

*Пример.* Рассмотрим комплексный полосовой фильтр, синтезированный на базе фильтра Баттерворта второго порядка с частотной передаточной функцией

$$W(j\omega) = \frac{\omega_{\text{ср}}^2}{\left[j(\omega - \omega_0)\right]^2 + j\sqrt{2}\omega_{\text{ср}}(\omega - \omega_0) + \omega_{\text{ср}}^2}.$$

Для данного фильтра переходная характеристика в дискретной форме для $\omega_0 = 0$ имеет вид [7]

$$g_{\text{н}}[i] = 1 - e^{\frac{-\omega_{\text{ср}} iT}{\sqrt{2}}} \left( \sin \frac{\omega_{\text{ср}} iT}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\omega_{\text{ср}} iT}{\sqrt{2}} \right).$$

При этом матрица $A$ (17) и вектор-столбец **d** (18) приобретают вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & g_{\text{н}}[1] & g_{\text{н}}[0] \\ 1 & 1 & g_{\text{н}}[2] & g_{\text{н}}[1] \\ 1 & 1 & g_{\text{н}}[3] & g_{\text{н}}[3] \end{pmatrix}; \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} g_{\text{н}}[1] - g_{\text{н}}[0] \\ g_{\text{н}}[2] - g_{\text{н}}[0] \\ g_{\text{н}}[3] - g_{\text{н}}[0] \\ g_{\text{н}}[4] - g_{\text{н}}[0] \end{pmatrix}.$$

В результате для $f_{\text{ср}} = \omega_{\text{ср}} / (2\pi) = 10$ Гц и $T = 10^{-4}$ с имеем весовые коэффициенты $a_0 = 0$, $a_1 = 0.00191601419378$, $a_2 = 0.00186017891482$, $b_1 = -1.91119951998480$, $b_2 = 0.91497580309363$.

На рис. 3 представлены АЧХ синтезированного фильтра для частот настройки $f_0 = \omega_0 / (2\pi) = -50$ и 200 Гц.

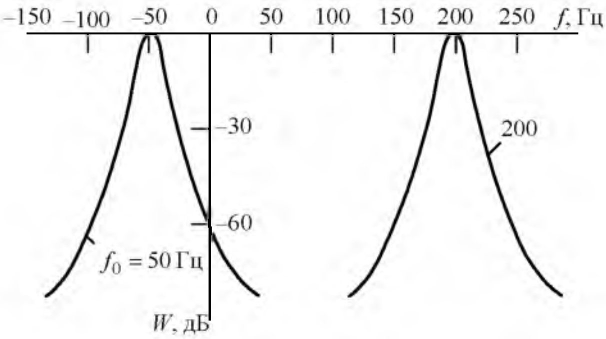


*Рис. 3*

Отклонение АЧХ комплексных непрерывного и дискретных фильтров оценивалось соотношением $\Delta W(\omega) = |W_{\text{н}}(\omega) - W(\omega)| / W_{\text{н}}(\omega)$, где $W_{\text{н}}(\omega)$ – АЧХ непрерывного фильтра; $W(\omega)$ – АЧХ дискретного фильтра, синтезированного на базе переходной характеристики.

Расчеты показывают, что в рассмотренном случае отклонение АЧХ дискретного фильтра, синтезированного на базе переходной характеристики, на частоте среза $\omega - \omega_0 = \omega_{\text{ср}}$ составляет –0.015 %, на частоте $\omega - \omega_0 = 2\omega_{\text{ср}}$ отклонение равно –0.07 % и на частоте $\omega - \omega_0 = 3\omega_{\text{ср}}$ – 0.15 %. Полученные значения отклонений АЧХ фильтров являются несущественными.

**Синтез рекурсивных комплексных дискретных фильтров методом билинейного *z*-преобразования.** В общем виде частотная передаточная функция комплексного непрерывного фильтра имеет вид дробно-рациональной функции [2]:

$$W_{\text{н}}(\omega) = \frac{\alpha_0 [j(\omega - \omega_0)]^m + \alpha_1 [j(\omega - \omega_0)]^{m-1} + \ldots + \alpha_m}{[j(\omega - \omega_0)]^n + \beta_1 [j(\omega - \omega_0)]^n + \ldots + \beta_n},$$

$$m \le n.$$

Для перехода от непрерывного фильтра к дискретному воспользуемся следующим соотношением для билинейного $z$-преобразования:

$$j(\omega - \omega_0) = \left( \frac{2}{T} \right) \frac{1 - z_0 z^{-1}}{1 + z_0 z^{-1}}. \tag{19}$$

В результате разностное уравнение синтезируемого комплексного рекурсивного дискретного фильтра будет определяться соотношением (10). При этом схема синтезируемого фильтра имеет вид, показанный на рис. 2.

*Пример.* Рассмотрим синтез режекторного комплексного рекурсивного дискретного фильтра второго порядка, частотная передаточная функция которого в непрерывном варианте имеет вид

$$W_{\text{н}}(j\omega) = \frac{[j(\omega - \omega_0)]^2}{[j(\omega - \omega_0)]^2 + j\sqrt{2}\omega_{\text{ср}}(\omega - \omega_0) + \omega_{\text{ср}}^2}. \tag{20}$$

Подставив в (20) соотношение (19), после математических преобразований (не приведенных в силу громоздкости) получим передаточную функцию комплексного дискретного фильтра в $z$-плоскости:

$$W(z) = \frac{a_0 + a_1 z_0 z^{-1} + a_2 z_0^2 z^{-2}}{1 + b_1 z_0 z^{-1} + b_2 z_0^2 z^{-2}},$$

где весовые коэффициенты определяются следующими соотношениями:

$$a_0 = a_2 = 1/\Delta; \quad a_1 = -2a_0;$$

$$b_1 = -\left(2 - 0.5\omega_{\text{ср}}^2 T^2\right) / \Delta;$$

$$b_2 = \left(1 - 0.25\sqrt{2}\omega_{\text{ср}} T + 0.25\omega_{\text{ср}}^2 T^2\right) / \Delta.$$

Здесь $\Delta = 1 + 0.25\sqrt{2}\omega_{\text{ср}} T + 0.25\omega_{\text{ср}}^2 T^2$.

Тогда согласно (10) разностное уравнение рассматриваемого фильтра приобретает вид

$$z_{\text{вых}}[k] = a_0 z_{\text{вх}}[k] + a_1 z_0 z_{\text{вх}}[k-1] + a_2 z_0^2 z_{\text{вх}}[k-2] - b_1 z_0 z_{\text{вых}}[k-1] - b_2 z_0^2 z_{\text{вых}}[k-2].$$

Рассмотренные в статье разнообразные комплексные фильтры по сравнению с одноканальными действительными фильтрами обладают более сложной структурой в виде двух квадратурных каналов. Данная структура позволяет сравнительно легко изменять частоту настройки фильтра, что делает их весьма эффективными при создании адаптивных и когерентных систем обработки информации, таких, как устройства селекции движущихся целей, доплеровские измерители скорости движения разнообразных объектов, обнаружители, устройства оценки параметров местоположения объектов и т. д.

Изложенная в статье методика синтеза нерекурсивных и рекурсивных комплексных дискретных фильтров, рассмотренные конкретные примеры построения подобных фильтров будут полезны при создании перечисленных ранее систем обработки информации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Микропроцессорные системы автоматического управления / под общ. ред. В. А. Бесекерского. Л.: Машиностроение, 1988. 355 с.

2. Бесекерский В. А. Цифровые автоматические системы. М.: Наука, 1976. 576 с.

3. Воробьев С. Н. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Изд. дом "Академия", 2013. 318 с.

4. Зиатдинов С. И. Синтез нерекурсивных дискретных фильтров во временной области // Информационно-управляющие системы. 2016. № 5. С. 98–101.

5. Зиатдинов С. И. Синтез рекурсивных дискретных фильтров во временно́й области // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2016. Вып. 3. С. 3–6.

6. Зиатдинов С. И. Анализ линейных систем на основе переходных характеристик // Информационно-управляющие системы. 2016. № 2. С. 104–106.

7. Зиатдинов С. И. Импульсная характеристика комплексного полосового фильтра Баттерворта // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 8. С. 167–172.

8. Зиатдинов С. И. Синтез комплексного фильтра с заданной передаточной функцией // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 7. С. 253–259.

Статья поступила в редакцию 6 марта 2017 г.

**Для цитирования:** Зиатдинов С. И., Соколова Ю. В. Синтез комплексных дискретных фильтров // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2017. № 4. С. 12–19.

***Зиатдинов Сергей Ильич*** – доктор технических наук (2005), профессор (2008) кафедры информационно-сетевых технологий Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения. Автор более 140 научных работ. Сфера научных интересов – обработка сигналов в радиотехнических системах.
E-mail: kaf53@guap.ru

***Соколова Юлия Витальевна*** – магистр по направлению "Информационные системы и технологии" (2016), аспирантка кафедры информационно-сетевых технологий Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения. Автор двух научных работ. Сфера научных интересов – обработка сигналов в радиотехнических системах.
E-mail: kaf53@guap.ru

S. I. Ziatdinov, Yu. V. Sokolova
*Saint Petersburg State University of the Aerospace Instrumentation*

## Synthesis of Complex Discrete Filters

***Abstract.*** *Synthesis methodology of the non-recursive and recursive complex discrete filters is examined on the base of the methods of the invariant impulse and transition characteristics, and on the base of z-transformation method. It is shown that complex filters contain two quadrature channels allowing easily to change the filter tuning frequency. This makes them very effective when adaptive and coherent systems for information processing are created. Specific examples of complex discrete filter arrangement are provided.*

**Key words:** Complex Non-Recursive and Recursive Filters, Impulse and Transition Characteristics, Complex Weighting Coefficients, Difference Equations

## REFERENCES

1. Besekerskij V. A. *Mikroprocessornye sistemy avtomaticheskogo upravlenija* [Microprocessor-Based Automatic Control Systems]. Leningrad, *Mashinostroenie*, 1988, 355 p. (In Russian)

2. Besekerskij V. A. *Cifrovye avtomaticheskie sistemy* [Digital Automatic Systems]. Moscow, *Nauka*, 1976, 576 p. (In Russian)

3. Vorob'ev S. N. *Cifrovaja obrabotka signalov* [Digital Signal Processing]. SPb, *Akademija*, 2013, 318 p. (In Russian)
4. Ziatdinov S. I. Synthesis of non-recursive discrete filters in the time domain. *Informacionno-upravljajushhie sistemy* [Information and Control Systems]. 2016, no. 5, pp. 98–101. (In Russian)
5. Ziatdinov S. I. Synthesis of recursive discrete filters in the time domain. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Rossii. Radioelektronika* [Journal of the Russian Universities. Radioelectronics]. 2016, no. 3, pp. 3–6. (In Russian)
6. Ziatdinov S. I. Analysis of linear systems based on transient characteristics. *Informacionno-upravljajushhie sistemy* [Information and Control Systems]. 2016, no. 2, pp. 104–106. (In Russian)
7. Ziatdinov S. I. Pulse characteristic of complex bandpass Butterworth filter. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Priborostroenie* [Journal of Instrument Engineering]. 2015, vol. 58, no. 8, pp. 167–172. (In Russian)
8. Ziatdinov S. I. Synthesis of complex filter with given transfer function. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Priborostroenie* [Journal of Instrument Engineering]. 2016, vol. 59, no. 7, pp. 253–259. (In Russian)

Received May, 03, 2017

**For citation:** Ziatdinov S. I., Sokolova Yu. V. Synthesis of Complex Discrete Filters. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Rossii. Radioelektronika* [Journal of the Russian Universities. Radioelectronics]. 2017, no. 4, pp. 12–19. (In Russian)

***Sergey I. Ziatdinov*** – D.Sc. in Engineering (2005), Professor (2008) of the Department of Information and Net Technology of Saint Petersburg State University of the Aerospace Instrumentation. The author of more than 140 scientific publications. Area of expertise: signal processing in radio technical systems.
E-mail: kaf53@guap.ru

***Yulia V. Sokolova*** – Master's Degree in information systems and technology (2016), postgraduate student of the Department of Information and Net Technology of Saint Petersburg State University of the Aerospace Instrumentation. The author of two scientific publications. Area of expertise: signal processing in radio technical systems.
E-mail: kaf53@guap.ru

УДК 621.396.96

В. Т. Ермолаев, В. Ю. Семенов, А. Г. Флаксман
*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского*
А. В. Ястребов
*Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева*

# Пространственно-временной компенсатор широкополосных помех на основе метода степенных векторов

*Рассмотрен адаптивный автокомпенсатор широкополосных помех (АКШП), обеспечивающий на выходе минимальную среднюю мощность помех. Предложен алгоритм адаптивного подавления широкополосных помех, основанный на разложении весового вектора АКШП в степенном базисе, обладающий невысокой вычислительной сложностью. Получены регуляризованные оценки весов коэффициентов автокомпенсатора по ограниченному числу выборок входного процесса. Приведены результаты моделирования подавления широкополосных помех, характерных для радиолокации, действующих с различных пространственных направлений, с оценкой коэффициента подавления.*

**Автокомпенсатор, степенной базис, широкополосная помеха**

Для повышения отношения "сигнал/шум" в радиолокационных системах необходимо подавлять активные помехи, попадающие в полосу полезного сигнала [1]. В случае широкополосных систем эта задача может быть решена набором полосовых фильтров, процессы на выходе которых можно считать узкополосными, а их суммарная ширина полосы равна исходной. В каждом из узкополосных каналов помехи подавляются традиционными методами [2], [3]. Однако описанное решение характеризуется высокой вычислительной сложностью.

 