

УДК 621.396.96

Д. С. Боровицкий, А. Е. Жестерев
 АО "Российский институт радионавигации и времени" (Санкт-Петербург)
 В. П. Ипатов, Р. М. Мамчур
 Санкт-Петербургский государственный электротехнический
 университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина)

Потенциальная точность совместной оценки параметров радиовысотомером космического базирования

Для спутникового радиовысотомера на основе границы Крамера–Рао получены выражения и рассчитаны предельно достижимые минимальные дисперсии совместных оценок высоты космического носителя, степени взволнованности зондируемой водной поверхности и отношения "сигнал/шум" принимаемого сигнала.

Спутниковый высотомер, совместные измерения, оценка по максимуму правдоподобия, граница Крамера–Рао, матрица Фишера

Информационными параметрами, традиционно измеряемыми спутниковым высотомером (альтиметром), являются высота космического аппарата (КА) над зондируемой поверхностью, степень взволнованности исследуемой водной акватории, а также удельная эффективная площадь рассеяния (УЭПР) в освещаемом пятне [1], [2]. К этому перечню можно добавить и угол отклонения оси антенны от вертикали, оценка которого позволяет скорректировать систематические ошибки измерения указанных информационных параметров, обусловленные неточной юстировкой антенны [3]. В [4] детально проанализирована ситуация, когда единственным измеряемым параметром является время прихода отраженного сигнала высотомера, однозначно пересчитываемое в искомую высоту КА.

Как и в других многопараметрических задачах, при совместном измерении указанных величин погрешности оценок могут оказаться коррелированными, что чревато снижением точности по сравнению с отдельными измерениями. Настоящая статья посвящена количественному анализу подобных эффектов при включении в информационный вектор высоты КА, степени взволнованности водной акватории и УЭПР в освещаемом пятне. Угол отклонения антенного луча изъят из рассмотрения, поскольку от него существенно зависит лишь спадающий фронт эхосигнала, тогда как ключевую информацию о высоте, взволнованности и УЭПР несет нарастающий фронт последнего [1], [2].

Потенциальная точность совместных оценок.

Обобщим результаты [4], учитывая, что наряду с запаздыванием необходимо измерять и другие параметры сигнала, принимаемого альтиметром. Пусть $s(t)$ – сжатый зондирующий сигнал единичной амплитуды. Тогда при точном нацеливании антенны на надир зависимость принятой мощности от времени можно записать как [5], [6]

$$P_r(t; \tau, P_0) = P_0 \int_0^{\infty} \frac{s^2\left(t - \tau - \frac{2r}{c}\right)}{\left[1 + (\rho/h)^2\right]^2} G^2(\theta) \rho d\rho, \quad (1)$$

где τ – запаздывание отраженного сигнала, связанное с априорной неопределенностью высоты¹; P_0 – мощность, поступающая на приемник с единицы площади, освещаемой антенной; $r = \sqrt{h^2 + \rho^2}$ – наклонная дальность от фазового центра антенны до точечного отражателя с полярными координатами ρ , ϕ (h – высота орбиты КА; ρ – расстояние от проекции КА на земную поверхность до отражателя); c – скорость света; $G(\theta)$ – диаграмма направленности антенны (ДНА); $\theta = \arccos(h/r)$ – угол отклонения луча визирования элементарного отражателя от вертикали. Интеграл в (1) характеризует изменение вклада отдельных участков освещаемой зоны в суммарный сигнал на входе приемника со временем.

¹ Указанная неопределенность существенно меньше абсолютного значения высоты h и поэтому проявляет себя только временным сдвигом отраженного сигнала, не влияя на r и θ .

Реальный зондирующий сигнал в аналитических построениях можно практически без потери точности заменить колокольным [1], [2], [5]–[7]:

$$s(t) = \exp(-\beta t^2),$$

где $\beta = (2 \ln 2) / \Delta_{0,5}^2$, причем $\Delta_{0,5}$ – длительность импульса по уровню половинной мощности. Волнение водной поверхности при описании статистики отклонения высоты элементарного отражателя от среднего уровня моря гауссовским законом трансформирует колокольный сигнал вновь в колокольный, но большей длительности и меньшей амплитуды [5]:

$$s_w^2(t) = \sqrt{v} \cdot s^2(\sqrt{v} \cdot t), \quad (2)$$

где

$$v = \frac{1}{1 + 16\beta(\sigma_z/c)^2} \approx \frac{1}{1 + \beta(H_w/c)^2}, \quad (3)$$

σ_z – среднеквадратическое отклонение (СКО) высоты отражающей точки волны над средним уровнем моря; $H_w \approx 4\sigma_z$ – значимая высота волны. В результате оценка высоты волны статистически эквивалентна измерению неизвестного параметра v сигнала (2).

Мощность P_0 , поступающая на приемник с единицы площади, освещаемой антенной, в (1) зависит от УЭПР σ_0 [1], [5]–[7], которая может меняться в широких пределах и априори неизвестна. Поэтому параметр P_0 подлежит измерению наряду с τ и v , несущими информацию о высоте орбиты КА и волнении соответственно.

При гауссовской аппроксимации ДНА [6]

$$G(\theta) = \exp\left[-(2/\gamma)\sin^2\theta\right],$$

где

$$\gamma = (2/\ln 2)\sin^2(\theta_{0,5}/2),$$

причем $\theta_{0,5}$ – ширина ДНА по половинному уровню, аналитическое выражение для профиля мощности эхосигнала при нулевом отклонении луча антенны от вертикали имеет вид [5]

$$\begin{aligned} & P_{rw}(t; \tau, v, P_0) \approx \\ & \approx \frac{P_0 \sqrt{\pi} \cdot ch}{2\sqrt{2\beta}} \Phi' \left[2\sqrt{\beta v} \left(t - \tau - \frac{\alpha}{4\beta v} \right) \right] \times \\ & \times \exp \left[-\alpha \left(t - \tau - \frac{\alpha}{8\beta v} \right) \right], \quad (4) \end{aligned}$$

где

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-z^2/2) dz$$

– интеграл вероятности; $\alpha = 4c/(\gamma h)$.

Введем обозначение

$$q(t) = P_{rw}(t; \tau, v, P_0) / \sigma_n^2,$$

где σ_n^2 – дисперсия шума на входе квадратичного детектора.

Обозначив

$$P_r = P_0 \sqrt{\pi/(2\beta)} \cdot ch/2 \quad (5)$$

и сместив начало отсчета времени к моменту $2h/c$, из (4) имеем:

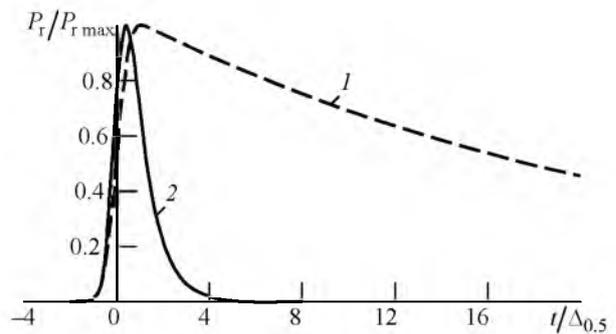
$$q(t) = Q\varphi(t; \tau, v),$$

где

$$Q = P_r / \sigma_n^2, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \varphi(t; \tau, v) = & \Phi' \left[2\sqrt{\beta v} \left(t - \tau - \frac{\alpha}{4\beta v} \right) \right] \times \\ & \times \exp \left[-\alpha \left(t - \tau - \frac{\alpha}{8\beta v} \right) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

На рисунке представлены нормированные профили принимаемой альтиметром мощности при $\tau = \theta$, $\theta_{0,5} = 0.6^\circ$ и $h = 1000$ км для $\Delta_{0,5}$: 1 – около 2.77 нс; 2 – 78 нс. Первую кривую можно ассоциировать со спокойной поверхностью, вторую – с высотой волны порядка 20 м.



Расчеты выполнены как численным интегрированием (1), так и по (7). На кривых заметить различие результатов невозможно, абсолютное расхождение полученных значений не превосходит $0.5 \cdot 10^{-5}$. Результаты расчетов демонстрируют точность аппроксимации и возможность ее применения в дальнейшем анализе.

Считая спектр принимаемого сигнала ограниченным полосой W , повторив выкладки [4], получим выражение для решающей статистики, достаточной для оценки вектора информационных параметров $\Lambda = (\tau, \nu, Q)$:

$$z(\Lambda) = \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Q\varphi(k\delta; \tau, \nu) y_i^2(k\delta)}{1 + Q\varphi(k\delta; \tau, \nu)} - M \sum_{k=0}^{n-1} \ln[1 + Q\varphi(k\delta; \tau, \nu)], \quad (8)$$

где M – общее число зондирований; n – число обрабатываемых отсчетов на каждом зондировании; $\delta = 1/W$ – интервал дискретизации Найквиста; $y_i(t)$ – огибающая принимаемого сигнала на i -м зондировании. С учетом свойств дискретизации по Найквисту–Котельникову после домножения на $\delta = 1/W$ суммы по k в (8) обратятся в интегралы:

$$z(\Lambda) = \frac{W}{2\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{M-1} \int_0^T \frac{Q\varphi(t; \tau, \nu) y_i^2(t)}{1 + Q\varphi(t; \tau, \nu)} dt - MW \int_0^T \ln[1 + Q\varphi(t; \tau, \nu)] dt, \quad (9)$$

где T – протяженность интервала наблюдения на отдельном зондировании.

Усреднение статистики (9) по шуму даст результат:

$$\overline{z(\Lambda)} = MW \int_0^T \frac{Q\varphi(t; \tau, \nu) [1 + Q_0\varphi(t; \tau_0, \nu_0)]}{1 + Q\varphi(t; \tau, \nu)} dt - MW \int_0^T \ln[1 + Q\varphi(t; \tau, \nu)] dt, \quad (10)$$

где τ_0 , ν_0 и Q_0 – истинные значения запаздывания, ν (3) и Q (6) соответственно.

Для расчета потенциальной точности измерения трех параметров обратимся к границе Крамера–Рао, устанавливающей асимптотически достижимый (при достаточно продолжительных наблюдениях) нижний предел дисперсий оценок параметров. Первый шаг при ее использовании состоит в нахождении матрицы Фишера Φ с размерностью 3×3 [8]–[9], элементами которой являются взятые с обратным знаком смешанные производные второго порядка от $\overline{z(\Lambda)}$ по измеряемым параметрам в точке $\Lambda = \Lambda_0 = (\tau_0, \nu_0, Q_0)$. Продифференцируем правую часть (10) по τ :

$$\frac{\partial \overline{z(\Lambda)}}{\partial \tau} = MWQ \int_0^T \left\{ \frac{\partial \varphi(t; \tau, \nu)}{\partial \tau} \times \frac{[Q_0\varphi(t; \tau_0, \nu_0) - Q\varphi(t; \tau, \nu)]}{[1 + Q\varphi(t; \tau, \nu)]^2} \right\} dt. \quad (11)$$

Повторив дифференцирование по τ , получим первый диагональный элемент матрицы Фишера

$$\Phi_{\tau\tau} = - \left. \frac{\partial^2 \overline{z(\Lambda)}}{\partial \tau^2} \right|_{\Lambda = \Lambda_0} = MWQ_0^2 \int_0^T \left[\frac{\left. \frac{\partial \varphi(t; \tau, \nu_0)}{\partial \tau} \right|_{\tau = \tau_0}}{1 + Q_0\varphi(t; \tau_0, \nu_0)} \right]^2 dt. \quad (12)$$

Из (7) имеем:

$$\left. \frac{\partial \varphi(t; \tau, \nu_0)}{\partial \tau} \right|_{\tau = \tau_0} = \left\{ \alpha \Phi \left[2\sqrt{\beta\nu_0} \left(\vartheta - \frac{\alpha}{4\beta\nu_0} \right) \right] - \sqrt{\frac{2\beta\nu_0}{\pi}} \exp \left[-2\beta\nu_0 \left(\vartheta - \frac{\alpha}{4\beta\nu_0} \right)^2 \right] \right\} \times \exp \left[-\alpha \left(\vartheta - \frac{\alpha}{8\beta\nu_0} \right) \right], \quad (13)$$

где $\vartheta = t - \tau_0$. Подстановка этого результата совместно с (7) в (12), замена переменной $x = t - \tau_0 - \alpha/(4\beta\nu_0)$ и распространение интегрирования на всю временную ось дают:

$$\Phi_{\tau\tau} = MWQ_0^2 \times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A_\tau}{B} \right)^2 \exp \left[-2\alpha \left(x + \frac{\alpha}{8\beta\nu_0} \right) \right] dx, \quad (14)$$

где

$$A_\tau = \alpha \Phi \left(2\sqrt{\beta\nu_0} \cdot x \right) - \sqrt{\frac{2\beta\nu_0}{\pi}} \exp \left(-2\beta\nu_0 x^2 \right);$$

$$B = 1 + Q_0 \Phi \left(2\sqrt{\beta\nu_0} \cdot x \right) \exp \left[-\alpha \left(x + \frac{\alpha}{8\beta\nu_0} \right) \right].$$

Подобным же образом из (10) получим:

$$\frac{\partial \overline{z(\Lambda)}}{\partial \nu} = MWQ \int_0^T \left\{ \frac{\partial \varphi(t; \tau, \nu)}{\partial \nu} \times \frac{[Q_0\varphi(t; \tau_0, \nu_0) - Q\varphi(t; \tau, \nu)]}{[1 + Q\varphi(t; \tau, \nu)]^2} \right\} dt \quad (15)$$

и после второго дифференцирования по v второй диагональный элемент матрицы Фишера:

$$\begin{aligned} \Phi_{vv} &= -\left. \frac{\partial^2 \overline{z(\Lambda)}}{\partial v^2} \right|_{\Lambda=\Lambda_0} = \\ &= MWQ_0^2 \int_0^T \left[\frac{\left. \frac{\partial \varphi(t; \tau_0, v)}{\partial v} \right|_{v=v_0}}{1 + Q_0 \varphi(t; \tau_0, v_0)} \right]^2 dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Дифференцируя (7) по v , имеем:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi(t; \tau_0, v)}{\partial v} \right|_{v=v_0} &= \\ &= \left[\sqrt{\frac{\beta}{2\pi v_0}} \exp(-2\beta v_0 x^2) \left(x + \frac{\alpha}{2\beta v_0} \right) - \right. \\ &\left. - \frac{\alpha^2}{8\beta v_0^2} \Phi'(2\sqrt{\beta v_0} \cdot x) \right] \exp \left[-\alpha \left(x + \frac{\alpha}{8\beta v_0} \right) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

где $x = t - \tau_0 - \alpha/(4\beta v_0)$. Подставив это выражение в (16), приходим к равенству:

$$\begin{aligned} \Phi_{vv} &= MWQ_0^2 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A_v}{B} \right)^2 \exp \left[-2\alpha \left(x + \frac{\alpha}{8\beta v_0} \right) \right] dx, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} A_v &= \sqrt{\frac{\beta}{2\pi v_0}} \exp(-2\beta v_0 x^2) \left(x + \frac{\alpha}{2\beta v_0} \right) - \\ &- \frac{\alpha^2}{8\beta v_0^2} \Phi'(2\sqrt{\beta v_0} \cdot x). \end{aligned}$$

Производная (10) по Q имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{z(\Lambda)}}{\partial Q} &= MW \times \\ &\times \int_0^T \frac{\varphi(t; \tau, v) [Q_0 \varphi(t; \tau_0, v_0) - Q \varphi(t; \tau, v)]}{[1 + Q \varphi(t; \tau, v)]^2} dt, \end{aligned}$$

так что после повторного дифференцирования для третьего диагонального элемента матрицы Фишера получится:

$$\begin{aligned} \Phi_{QQ} &= -\left. \frac{\partial^2 \overline{z(\Lambda)}}{\partial Q^2} \right|_{\Lambda=\Lambda_0} = \\ &= MW \int_0^T \left[\frac{\varphi(t; \tau_0, v_0)}{1 + Q_0 \varphi(t; \tau_0, v_0)} \right]^2 dt. \end{aligned}$$

После подстановки в это выражение (7) и распространения интегрирования на всю ось времени имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_{QQ} &= MW \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A_Q}{B} \right)^2 \exp \left[-2\alpha \left(x + \frac{\alpha}{8\beta v_0} \right) \right] dx, \end{aligned} \quad (19)$$

где $A_Q = \Phi'(2\sqrt{\beta v_0} \cdot x)$.

Перейдем к внедиагональным элементам матрицы Фишера. Дифференцирование (11) по v дает результат:

$$\begin{aligned} \Phi_{\tau v} &= \Phi_{v\tau} = -\left. \frac{\partial^2 \overline{z(\Lambda)}}{\partial \tau \partial v} \right|_{\Lambda=\Lambda_0} = \\ &= MWQ_0^2 \int_0^T \frac{\left. \frac{\partial \varphi(t; \tau, v_0)}{\partial \tau} \right|_{\tau=\tau_0} \left. \frac{\partial \varphi(t; \tau_0, v)}{\partial v} \right|_{v=v_0}}{[1 + Q_0 \varphi(t; \tau_0, v_0)]^2} dt, \end{aligned}$$

который с учетом (13) и (17) принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi_{\tau v} &= \Phi_{v\tau} = MWQ_0^2 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_\tau A_v}{B^2} \exp \left[-2\alpha \left(x + \frac{\alpha}{8\beta v_0} \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогично из (11):

$$\begin{aligned} \Phi_{\tau Q} &= \Phi_{Q\tau} = -\left. \frac{\partial^2 \overline{z(\Lambda)}}{\partial \tau \partial Q} \right|_{\Lambda=\Lambda_0} = \\ &= MWQ_0 \int_0^T \frac{\left. \frac{\partial \varphi(t; \tau, v_0)}{\partial \tau} \right|_{\tau=\tau_0} \varphi(t; \tau_0, v_0)}{[1 + Q_0 \varphi(t; \tau_0, v_0)]^2} dt, \end{aligned}$$

и с учетом (13) и (7) получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{\tau Q} &= \Phi_{Q\tau} = MWQ_0 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_\tau A_Q}{B^2} \exp \left[-2\alpha \left(x + \frac{\alpha}{8\beta v_0} \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Наконец, из (15):

$$\begin{aligned} \Phi_{vQ} &= \Phi_{Qv} = -\left. \frac{\partial^2 \overline{z(\Lambda)}}{\partial v \partial Q} \right|_{\Lambda=\Lambda_0} = \\ &= MWQ_0 \int_0^T \frac{\left. \frac{\partial \varphi(t; \tau_0, v)}{\partial v} \right|_{v=v_0} \varphi(t; \tau_0, v_0)}{[1 + Q_0 \varphi(t; \tau_0, v_0)]^2} dt, \end{aligned}$$

что совместно с (17) и (7) дает:

$$\Phi_{vQ} = \Phi_{Qv} = MWQ_0 \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_v A_Q}{B^2} \exp \left[-2\alpha \left(x + \frac{\alpha}{8\beta v_0} \right) \right] dx. \quad (22)$$

Далее необходимо выполнить обращение найденной матрицы Фишера

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{\tau\tau} & \Phi_{\tau v} & \Phi_{\tau Q} \\ \Phi_{v\tau} & \Phi_{vv} & \Phi_{vQ} \\ \Phi_{Q\tau} & \Phi_{Qv} & \Phi_{QQ} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Диагональные элементы обратной матрицы Φ^{-1} и есть искомые нижние границы дисперсий оценок соответствующих параметров, достижимые, согласно определению границы Крамера–Рао, при достаточно продолжительных наблюдениях.

Определитель матрицы (23)

$$\det \Phi = \Phi_{\tau\tau} \Phi_{vv} \Phi_{QQ} + \Phi_{\tau v} \Phi_{vQ} \Phi_{\tau Q} + \Phi_{\tau Q} \Phi_{\tau v} \Phi_{vQ} - \Phi_{\tau Q}^2 \Phi_{vv} - \Phi_{vQ}^2 \Phi_{\tau\tau} - \Phi_{\tau v}^2 \Phi_{QQ}.$$

В итоге для дисперсий оценок $\hat{\tau}$, \hat{v} и \hat{Q} соответствующих параметров получим:

$$\text{var} \{ \hat{\tau} | \Lambda_0 \} \approx \frac{\Phi_{vv} \Phi_{QQ} - \Phi_{vQ}^2}{\det \Phi}; \quad (24)$$

$$\text{var} \{ \hat{v} | \Lambda_0 \} \approx \frac{\Phi_{\tau\tau} \Phi_{QQ} - \Phi_{\tau Q}^2}{\det \Phi}; \quad (25)$$

$$\text{var} \{ \hat{Q} | \Lambda_0 \} \approx \frac{\Phi_{\tau\tau} \Phi_{vv} - \Phi_{\tau v}^2}{\det \Phi}. \quad (26)$$

Получение численных оценок в соответствии с приведенными соотношениями реализовано программным кодом в среде Matlab, осуществляющим расчет элементов матрицы Фишера (14), (18)–(22) численным интегрированием с последующим нахождением дисперсий оценок из (23)–(26).

Для определения диапазона реальных значений параметра Q (6) выполним стандартный энергетический расчет высотомера, приняв за исходные следующие значения параметров:

- высота орбиты $h = 1000$ км;
- УЭПР рассеивающей поверхности $\sigma_0 > 8$ дБ для моря и $\sigma_0 > 0$ дБ для суши;
- диаметр зеркала антенны альтиметра $D = 1$ м;
- излучаемая пиковая мощность $P_{\text{тр}} = 10$ Вт;
- длительность излучаемого сигнала $T = 100$ мкс;
- ширина спектра сигнала $W = 100, 300, 500$ МГц;
- эффективная шумовая температура приемника $T_r = 725$ К.

Ориентируясь на данные высотомера AltiKa [11], имеющего одни из наилучших параметров в настоящее время, примем одночастотную архитектуру с несущей Ка-диапазона при частоте $f_0 = 35.75$ ГГц (длина волны $\lambda \approx 0.84$ см).

Коэффициент усиления параболической антенны [10]

$$G_{\text{дБ}} = 10 \lg \eta + 20 \lg (\pi D / \lambda),$$

где η – фактор эффективности излучения, лежащий в интервале от 0.5 до 0.6. Приняв $\eta = 0.5$, получим $G_{\text{дБ}} \approx 48.5$ дБ.

Мощность, поступающую с единицы освещаемой высотомером площади, определим согласно [5], [6]:

$$P_0 = \frac{WTP_{\text{тр}}G^2\lambda^2\sigma_0}{2(4\pi)^2 L_p h^4},$$

где L_p – дополнительные трассовые потери. Перейдя к логарифмической мере, имеем:

$$P_{0, \text{дБ}} = 10 \lg (WT) + 10 \lg P_{\text{тр}} + 2G_{\text{дБ}} + 20 \lg \lambda + \sigma_{0, \text{дБ}} - 20 \lg (4\pi) - L_{p, \text{дБ}} - 40 \lg h - 3.$$

Исходя из определения (5):

$$P_{r, \text{дБ}} = 10 \lg (WT) + 10 \lg P_{\text{тр}} + 2G_{\text{дБ}} + 20 \lg \lambda + \sigma_{0, \text{дБ}} + 10 \lg c + 10 \lg \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} - 10 \lg \sqrt{\beta} - 20 \lg (4\pi) - L_{p, \text{дБ}} - 30 \lg h - 3.$$

Учтем, что $\beta = (2 \ln 2) / \Delta_{0,5}^2$, и примем в первом приближении $\Delta_{0,5} = 1/W$. Кроме того, $\sigma_n^2 = WN_0$, где N_0 – односторонняя спектральная плотность шума. В итоге получим:

$$Q_{\text{дБ}} = 10 \lg T + 10 \lg P_{\text{тр}} + 2G_{\text{дБ}} + 20 \lg \lambda + \sigma_{0, \text{дБ}} + 10 \lg c + 10 \lg \sqrt{\pi / \ln 2} - 20 \lg (4\pi) - L_{p, \text{дБ}} - 30 \lg h - N_{0, \text{дБ}} - 10 \lg W - 9. \quad (27)$$

Поскольку гидрометеорные потери в Ка-диапазоне весьма значительны [11]–[12], примем с некоторым запасом $L_{p, \text{дБ}} = 10$ дБ. При указанной шумовой температуре приемника $N_{0, \text{дБ}} \approx -200$ дБВт/Гц. Подставив в (27) остальные значения параметров, получим приведенные в табл. 1 значения Q для шести сочетаний эффективного сечения σ_0 и полосы сигнала W .

Таблица 1

σ_0 , дБ					
8			0		
W , МГц					
100	300	500	100	300	500
Q , дБ					
20.55	15.78	13.56	12.55	7.78	5.56

Определим точность (СКО) оценок целевых измеряемых величин: высоты орбиты h , значимой высоты волны H_w и параметра Q . Пересчет дисперсии (25) в СКО σ_h измеренной высоты очевиден:

$$\sigma_h = \frac{c}{2} \sqrt{\text{var}\{\hat{h}|\Lambda_0\}} \approx \frac{c}{2} \sqrt{\frac{\Phi_{vv}\Phi_{QQ} - \Phi_{vQ}^2}{\det \Phi}}. \quad (28)$$

Для того чтобы преобразовать (25) в СКО σ_H оценки значимой высоты волны, найдем крутизну зависимости H_w от v . Из (3)

$$\left| \frac{\partial H_w}{\partial v} \right| = \frac{[1 + \beta(H_w/c)^2]^2}{2\beta H_w/c^2}. \quad (29)$$

Тогда в предположении высокой точности измерений получим:

$$\sigma_H \approx \left| \frac{\partial H_w}{\partial v} \right| \sqrt{\text{var}\{\hat{v}|\Lambda_0\}} \approx \frac{[1 + \beta(H_w/c)^2]^2}{2\beta H_w/c^2} \sqrt{\frac{\Phi_{\tau\tau}\Phi_{QQ} - \Phi_{\tau Q}^2}{\det \Phi}}. \quad (30)$$

Последний из неизвестных параметров измеряется напрямую, поэтому его СКО определяется как

$$\sigma_Q = \sqrt{\text{var}\{\hat{Q}|\Lambda_0\}} \approx \sqrt{\frac{\Phi_{\tau\tau}\Phi_{vv} - \Phi_{\tau v}^2}{\det \Phi}}. \quad (31)$$

Показательны также индикаторы снижения точности при одновременной оценке всех рассматриваемых параметров (h , H_w и Q) относительно раздельного измерения каждого из них (при априори известных двух других). Маркируя индексом "0" дисперсии оценок в последнем случае, имеем:

$$\text{var}_0\{\hat{\tau}|\tau_0\} \approx 1/\Phi_{\tau\tau}; \quad \text{var}_0\{\hat{v}|v_0\} \approx 1/\Phi_{vv};$$

$$\text{var}_0\{\hat{Q}|Q_0\} \approx 1/\Phi_{QQ}.$$

В итоге отношения γ_h , γ_H , γ_Q СКО при совместных и раздельных измерениях соответствующих параметров

$$\gamma_h = \sqrt{\frac{\text{var}\{\hat{h}|\Lambda_0\}}{\text{var}_0\{\hat{h}|\tau_0\}}} = \sqrt{\frac{\Phi_{\tau\tau}(\Phi_{vv}\Phi_{QQ} - \Phi_{vQ}^2)}{\det \Phi}}, \quad (32)$$

$$\gamma_H = \sqrt{\frac{\text{var}\{\hat{H}|\Lambda_0\}}{\text{var}_0\{\hat{H}|v_0\}}} = \sqrt{\frac{\Phi_{vv}(\Phi_{\tau\tau}\Phi_{QQ} - \Phi_{\tau Q}^2)}{\det \Phi}}, \quad (33)$$

$$\gamma_Q = \sqrt{\frac{\text{var}\{\hat{Q}|Q_0\}}{\text{var}_0\{\hat{Q}|Q_0\}}} = \sqrt{\frac{\Phi_{QQ}(\Phi_{\tau\tau}\Phi_{vv} - \Phi_{\tau v}^2)}{\det \Phi}}. \quad (34)$$

Результаты вычислений согласно (24)–(26) и (28)–(34) для значений Q из табл. 1, $M = 1000$ и шести значений значимой высоты волны H_w сведены в табл. 2, 3, где $\sigma_\tau = \sqrt{\text{var}\{\hat{\tau}|\Lambda_0\}}$,

$$\sigma_v = \sqrt{\text{var}\{\hat{v}|\Lambda_0\}}, \quad \sigma_Q = \sqrt{\text{var}\{\hat{Q}|\Lambda_0\}}.$$

В табл. 2 представлены данные для спокойного моря ($\sigma_0 > 8$ дБ, $H_w = 0$) и твердой поверхности ($\sigma_0 > 0$ дБ). Табл. 3 представляет данные для взволнованной морской поверхности с различной величиной волнения.

В результате анализа приведенных в табл. 2, 3 данных можно сделать следующие выводы:

1. Потенциальная точность оценки высоты КА и значимой высоты волны, как и следовало ожидать, возрастает с расширением спектра сигнала. Действительно, при больших значениях Q флуктуации оценок указанных величин в большой степени определяются собственными замираниями сигнала, влияние которых снижается с ростом крутизны нарастающего фронта экосигнала.

2. При слабой взволнованности и излучаемой пиковой мощности порядка 10 Вт реализуемы измерения высоты КА с погрешностью в пределах 1...2 см.

3. Увеличение взволнованности морской поверхности приводит к снижению точности измерения как высоты КА, так и значимой высоты

Таблица 2

Параметр	σ_0 , дБ					
	8			0		
	W , МГц					
	100	300	500	100	300	500
	Q , дБ					
	20.55	15.78	13.56	12.55	7.78	5.56
σ_τ , нс	0.156	0.060	0.039	0.192	0.082	0.058
σ_v	0.052	0.071	0.083	0.088	0.138	0.178
σ_Q	0.745	0.168	0.086	0.159	0.042	0.023
σ_h , см	2.346	0.901	0.580	2.876	1.234	0.871
γ_h	1.961	1.762	1.642	1.519	1.301	1.204
γ_H	1.974	1.765	1.643	1.524	1.301	1.204
γ_Q	1.025	1.005	1.002	1.008	1.000	1.000

Таблица 3

Параметр	$H_w, \text{ м}$								
	1			4			8		
	$W, \text{ МГц}$								
	100	300	500	100	300	500	100	300	500
	$Q, \text{ дБ}$								
	20.55	15.78	13.56	20.55	15.78	13.56	20.55	15.78	13.56
$\sigma_{\tau}, \text{ нс}$	0.163	0.077	0.059	0.212	0.129	0.107	0.261	0.167	0.139
σ_v	0.042	0.020	$9.0 \cdot 10^{-3}$	$8.6 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$5.8 \cdot 10^{-5}$
σ_Q	0.745	0.168	0.086	0.749	0.167	0.085	0.751	0.166	0.084
$\sigma_h, \text{ см}$	2.441	1.149	0.890	3.168	1.940	1.598	3.920	2.503	2.081
$\sigma_H, \text{ см}$	15.204	4.277	3.186	9.411	6.077	5.427	10.988	8.083	7.328
γ_h	1.952	1.743	1.618	1.866	1.637	1.518	1.729	1.509	1.402
γ_H	1.966	1.748	1.621	1.892	1.653	1.529	1.773	1.536	1.420
γ_Q	1.027	1.009	1.005	1.047	1.023	1.016	1.075	1.041	1.026

Параметр	$H_w, \text{ м}$					
	12			16		
	$W, \text{ МГц}$					
	100	300	500	100	300	500
	$Q, \text{ дБ}$					
	20.55	15.78	13.56	20.55	15.78	13.56
$\sigma_{\tau}, \text{ нс}$	0.292	0.189	0.159	0.310	0.204	0.173
σ_v	$6.9 \cdot 10^{-4}$	$6.2 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$	$9.6 \cdot 10^{-6}$
σ_Q	0.747	0.163	0.082	0.739	0.160	0.081
$\sigma_h, \text{ см}$	4.374	2.835	2.379	4.658	3.061	2.596
$\sigma_H, \text{ см}$	12.507	9.485	8.649	13.718	10.552	9.670
γ_h	1.602	1.400	1.307	1.492	1.310	1.231
γ_H	1.664	1.437	1.331	1.568	1.355	1.259
γ_Q	1.096	1.052	1.032	1.110	1.057	1.034

волны. Объяснение этого эффекта состоит в "размывании" нарастающего фронта эхосигнала при сильном волнении из-за флуктуаций возвышений блестящих точек в освещаемом пятне.

4. При совместном измерении параметров h , H_w и Q СКО оценок h и H_w возрастают в 1.23...1.97 раз относительно отдельных измерений, тогда как точность измерения Q практически не зависит от того, измеряются остальные величины или нет.

В результате проведенного анализа получены выражения для потенциально достижимых дисперсий совместных оценок высоты КА, взволнованности водной поверхности и отражающих характеристик освещаемого пятна. Рассчитанные с их помощью зависимости подтверждают принципиальную возможность построения спутниковых высотометров, измеряющих высоту с сантиметровой точностью и значимую высоту волны с погрешностью 5...15 см.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Satellite Altimetry and Earth Sciences. A Handbook of Techniques and Applications / ed. by L.-L. Fu, A. Cazenave. San Diego; Academic Press, 2001. 463 p.
2. Coastal Altimetry / ed by S. Vignudelli, A. G. Kostianoy, P. Cipollini, J. Benveniste. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 578 p.
3. Improving the Jason-1 Ground Retracking to Better Account for Attitude Effects / L. Amarouche, P. Thibaut, O. Z. Zanife, J.-P. Dumont, P. Vincent, N. Steunou // Marine Geodesy. 2004. Vol. 27, № 1–2. P. 171–197.
4. Потенциальная точность измерения запаздывания отраженного сигнала космическим альтимет-

- ром / Д. С. Боровицкий, А. Е. Жестерев, В. П. Ипатов, Р. М. Мамчур // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2017. № 2. С. 5–11.
5. Аналитическая модель эхосигнала спутникового высотометра / Д. С. Боровицкий, А. Е. Жестерев, В. П. Ипатов, Р. М. Мамчур // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2017. № 3. С. 39–45.
6. Brown G. S. The Average Impulse Response of a Rough Surface and Its Applications // IEEE Trans. on Ant. and Prop. 1977. Vol. AP-25, № 1. P. 67–74.

7. Barrick D. E., Lipa B. J. Analysis and Interpretation of Altimeter Sea Echo // *Advances in Geophysics*. 1985. Vol. 27. P. 61–100.

8. Радиотехнические системы: учеб. для вузов / под ред. Ю. М. Казаринова. М.: Высш. шк., 1990. 496 с.

9. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции: в 2 т. Т. 1 / пер. с англ. М.: Сов. радио, 1972. 744 с.

10. Прокис Дж. Цифровая связь / пер. с англ. М.: Радио и связь, 2000. 800 с.

11. AltiKa: a Ka-Band Altimetry Payload and System for Operational Altimetry During The GMES Period / P. Vincent [et al.]// *Sensors*. 2006. Vol. 6. P. 208–234.

12. Tournadre J. Lambin-Artru J., Steunou N. Cloud and Rain Effects on AltiKa/SARAL Ka-Band Radar Altimeter. Pt. I: Modeling and Mean Annual Data Availability // *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*. 2009. Vol. GRS-47, № 6. P. 1806–1817.

Статья поступила в редакцию 16 декабря 2016 г.

Для цитирования: Потенциальная точность совместной оценки параметров радиовысотометром космического базирования / Д. С. Боровицкий, А. Е. Жестерев, В. П. Ипатов, Р. М. Мамчур // *Изв. вузов России. Радиоэлектроника*. 2017. № 4. С. 33–41.

Боровицкий Дмитрий Сергеевич – кандидат технических наук (2016), ведущий научный сотрудник АО "Российский институт радионавигации и времени" (Санкт-Петербург). Автор более 10 научных публикаций. Сфера научных интересов – широкополосные системы радиолокации и радионавигации, теория сигналов. E-mail: dmitry_perogodin@mail.ru

Жестерев Александр Евгеньевич – кандидат технических наук (1982), начальник отдела АО "Российский институт радионавигации и времени" (Санкт-Петербург). Автор более 20 научных публикаций. Сфера научных интересов – радиолокация и радионавигация; теория связи. E-mail: zhesterev@mail.ru

Ипатов Валерий Павлович – доктор технических наук (1983), профессор (1985) кафедры радиотехнических систем Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Заслуженный деятель науки РФ (2001), почетный радист СССР (1983). Автор более 250 научных работ. Сфера научных интересов – радиоэлектронная системотехника; статистическая теория связи; широкополосные системы радиолокации, радионавигации и передачи данных; теория сигналов. E-mail: ival1941@yandex.ru

Мамчур Руслан Михайлович – магистр техники и технологий по направлению "Радиотехника" (2015), аспирант и ассистент кафедры радиотехнических систем Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Автор 5 научных публикаций. Сфера научных интересов – статистическая теория связи; широкополосные системы радиолокации, радионавигации и передачи данных; теория сигналов; техническая электродинамика. E-mail: ruslan.mamchur@mail.ru.

D. S. Borovitsky, A. E. Zhesterev
JSC "Russian Institute of Radionavigation and Time" (Saint Petersburg)
V. P. Ipatov, R. M. Mamchur
Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI"

Potential Accuracy of Joint Parameter Estimate by Space-Based Radar Altimeter

Abstract. The subject of research is a space-based radar altimeter. Modern satellite altimeters along with the instant distance to an earth surface are to measure the sea wave height and scattering cross section per unit of a probed spot. Ranking of specific measuring algorithms for the quantities mentioned is carried out by comparison of their accuracy indicators with the reference which is minimum theoretical estimate variance established by the Cramer-Rao bound. Calculation of such bounds in case of joint estimate comes down to inversion of the Fisher information matrix. In the paper, this task is solved within the framework of Gaussian approximation of both compressed ranging pulse and antenna pattern. As a result, expressions for noise variances of joint estimates of satellite height, significant wave height and power SNR are obtained. Quantifying the received equations into figures is implemented by numerical integration.

Key words: Satellite Altimeter, Joint Estimation, Maximum Likelihood Estimate, Cramer-Rao Bound, Fisher Matrix

REFERENCES

1. Satellite Altimetry and Earth Sciences. A Handbook of Techniques and Applications; ed. by L.-L. Fu, A. Cazenave. San Diego, Academic Press, 2001, 463 p.

2. Coastal Altimetry; ed by S. Vignudelli, A. G. Kostianoy, P. Cipollini, J. Benveniste. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 2011, 578 p.

3. Amarouche L., Thibaut P., Zanife O. Z., Dumont J.-P., Vincent P., Steunou N. Improving the Jason-1 Ground Retracking to Better Account for Attitude Effects. *Marine Geodesy*. 2004, vol. 27, no. 1–2, pp. 171–197.

4. Borovitsky D. S., Zhesterev A. E., Ipatov V. P., Mamchur R. M. Potential Accuracy of Echo-Signal Delay Measurement by Space-Based Radar Altimeter. *Izvestiya*

Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Rossii. Radioelektronika [Journal of the Russian Universities. Radioelectronics]. 2017, no. 2, pp. 5–11. (In Russian)

5. Borovitsky D. S., Zhesterev A.E., Ipatov V. P., Mamchur R. M. Radar Altimeter Echo-Signal Analytical Model. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Rossii. Radioelektronika* [Journal of the Russian Universities. Radioelectronics]. 2017, no. 3, pp. 39–45. (In Russian)

6. Brown G. S. The Average Impulse Response of a Rough Surface and its Applications. *IEEE Trans. on Ant. and Prop.* 1977, vol. AP-25, no. 1, pp. 67–74.

7. Barrick D. E., Lipa B. J. Analysis and Interpretation of Altimeter Sea Echo. *Advances in Geophysics*, 1985, vol. 27, pp. 61–100.

8. *Radiotekhnicheskie sistemy: Uchebnik dlya vuzov; pod red. Yu. M. Kazarinova* [Radio Engineering Systems: Textbook for High Schools]. Moscow, *Vyshh. shk.*, 1990, 496 p. (In Russian)

9. Van Trees H. L. *Detection, Estimation, and Modulation Theory. Pt. I.* New York, John Wiley & Sons, 1968, 697 p.

10. Proakis J. *Digital Communications.* 3rd edition. McGraw-Hill, 1995, 928 p.

11. AltiKa: a Ka-band altimetry payload and system for operational altimetry during the GMES period/ P. Vincent [et al.]. *Sensors.* 2006, vol. 6, pp. 208–234.

12. Tournadre J., Lambin-Artru J., Steunou N. Cloud and rain effects on AltiKa/SARAL Ka-band radar altimeter. P. I: Modeling and mean annual data availability. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing.* 2009, vol. 47, no. 6, pp. 1806–1817.

Received December, 16, 2016

For citation: Borovitsky D. S., Zhesterev A. E., Ipatov V. P., Mamchur R. M. Potential Accuracy of the Joint Parameter Estimate by a Space-Based Radar Altimeter. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Rossii. Radioelektronika* [Journal of the Russian Universities. Radioelectronics]. 2017, no. 4, pp. 33–41. (In Russian)

Dmitry S. Borovitsky – Ph.D. in Engineering (2016), leading research fellow of JSC "Russian Institute of Radionavigation and Time" (Saint Petersburg). The author of more than 10 scientific publications. Area of expertise: broadband radiolocation and radionavigation systems; signal theory.
E-mail: dmitry_nepogodin@mail.ru

Alexander E. Zhesterev – Ph.D. in Engineering (1982), Chief of the Department of JSC "Russian Institute of Radionavigation and Time" (Saint Petersburg). The author of more than 20 scientific publications. Area of expertise: radiolocation and radionavigation systems; communication theory.
E-mail: zhesterev@mail.ru

Valery P. Ipatov – D.Sc. in Engineering (1983), Professor (1985) of the Department of Radio Engineering Systems of Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI". Honored scientist of the RF (2001), honorable radioman of the USSR (1983). The author of more than 250 scientific publications. Area of expertise: radio-electronic system engineering; statistical communication theory; broadband radar, navigation and data systems; signal theory.
E-mail: ival1941@yandex.ru

Ruslan M. Mamchur – Master of Science in Radio Engineering (2015), post-graduate student and assistant of the Department of Radio Engineering Systems of Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI". The author of 5 scientific publications. Area of expertise: statistical communication theory; broadband radar, navigation and data systems; signal theory; technical electrodynamics.
E-mail: ruslan.mamchur@mail.ru