



УДК 621.396.67

С. В. Балландович, Л. М. Любина, А. Ю. Одинцов, М. И. Сугак  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина)

## Предельная добротность электрически малых антенн, вписанных в цилиндр и эллипсоид

Получены оценки границы добротности для электрически малых антенн, вписанных в цилиндр и трехосный эллипсоид. Для антенн, чья форма далека от сферической, приведенная оценка позволяет уточнить предел Чу–Маклина.

### Электрически малая антенна, эллипсоид, добротность, предел Чу–Маклина

Теория Чу–Маклина [1], [2] устанавливает связь между добротностью электрически малой антенны ( $Q$ ) и электрическим радиусом сферы, описанной вокруг нее ( $ka$ ):

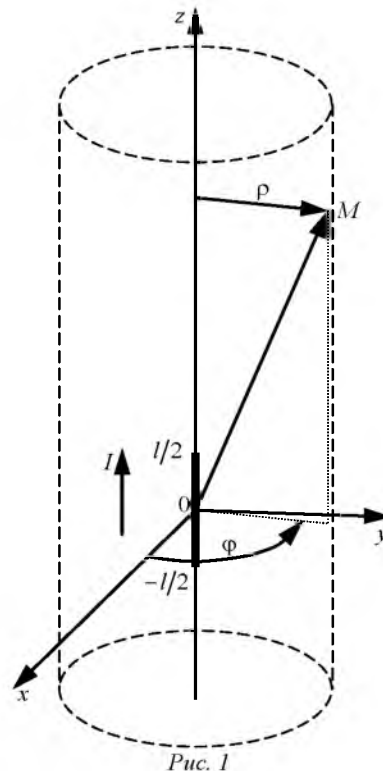
$$Q = \frac{1}{(ka)^3} + \frac{1}{ka},$$

где  $k$  – волновое число;  $a$  – радиус.

Эта теория обладает существенным практическим недостатком для антенн, чья форма заметно отличается от сферической (например, для биконических и цилиндрических вибраторов, излучателей в виде "таблетки", печатных элементов и др.). В этом случае теоретические оценки добротности, оставаясь верной границей "снизу", дают слишком большое расхождение с экспериментальными результатами, т. е. добротность реальной антенны, форма которой далека от сферической, оказывается выше, чем это дает фундаментальный предел [1], [2]. Таким образом, для практической инженерной деятельности существует потребность в более точной оценке, учитывающей форму антенны, а не только радиус описанной вокруг нее сферы.

В настоящей статье получены оценки границ добротности для антенн, вписанных в цилиндрический объем, а также в трехосный эллипсоид. Для цилиндрической поверхности предельная добротность определяется высотой и радиусом цилиндра (является двухпараметрической), для трехосного эллипсоида оценка добротности зависит от его измерений, т. е. становится трехпараметрической.

**Оценка добротности для электрически малой антенны, вписанной в цилиндр.** Зависимость добротности антенны от параметров цилиндрического объема, в который она вписана, получим по методике, описанной в [2], однако вместо сферического объема и представления полей внутреннего источника в сферической системе координат перейдем к цилиндрическому объему и, соответственно, записи полей в цилиндрической системе координат (рис. 1).



Представим выражения для поля электрического диполя Герца в цилиндрической системе координат. Воспользовавшись теоремой запаздывающих потенциалов, запишем векторный потенциал электрического типа в точке наблюдения  $M(\rho, \varphi, z)$ :

$$\mathbf{A}(\rho, \varphi, z) = \mathbf{e}_z \left( \frac{Il}{4\pi} \right) \frac{\exp(-ik\sqrt{\rho^2 + z^2})}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{e}_z$  – единичный орт оси  $z$ ;  $I$  – ток диполя;  $l$  – длина диполя. Расстояние от начала координат до точки наблюдения  $M$  определяется как  $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ .

Магнитное поле вычисляется через электрический векторный потенциал (1):

$$\mathbf{H}(\rho, \varphi, z) = \text{rot}[\mathbf{A}(\rho, \varphi, z)]. \quad (2)$$

В свою очередь, электрическое поле определим из уравнения Максвелла [3]:

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{i\omega\epsilon} \text{rot}[\mathbf{H}(\rho, \varphi, z)], \quad (3)$$

где  $\omega$  – круговая частота;  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды. Подстановкой (1) в (2) и далее в (3) можно получить точные выражения для составляющих электрического поля в цилиндрической системе координат (прил. 1). Электрическое поле содержит две компоненты:

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = \mathbf{e}_\rho E_\rho(\rho, \varphi, z) + \mathbf{e}_z E_z(\rho, \varphi, z),$$

где  $\mathbf{e}_\rho$  – единичный орт радиуса основания цилиндра;

$$E_\rho(\rho, \varphi, z) = \frac{IlZ_0 \exp(-ik\sqrt{\rho^2 + z^2})}{4\pi} \times \left[ \frac{ik\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3i\rho z}{k(\rho^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{3\rho z}{(\rho^2 + z^2)^2} \right]; \quad (4)$$

$$E_z(\rho, \varphi, z) = \frac{IlZ_0 \exp(-ik\sqrt{\rho^2 + z^2})}{4\pi} \times \left[ \frac{i(\rho^2 - z^2)}{k(\rho^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{ik\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{2z^2 - \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^2} \right], \quad (5)$$

причем  $Z_0$  – волновое сопротивление свободного пространства.

Согласно [1], [2] добротность определяется как отношение:

$$Q = 2\omega W_e / P_a, \quad (6)$$

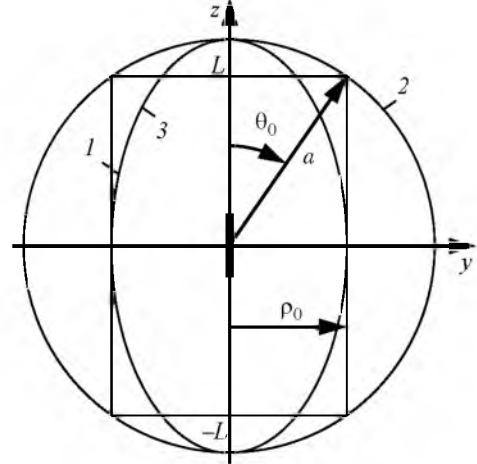


Рис. 2

где  $W_e$  – максимальная запасенная энергия электрического поля;  $P_a$  – мощность потерь на излучение. Запасенная энергия находится интегрированием по объему плотности энергии:

$$w(\rho, \varphi, z) = \epsilon \frac{|\mathbf{E}(\rho, \varphi, z)|^2}{2} = \epsilon \left[ \frac{|E_\rho(\rho, \varphi, z)|^2}{2} + \frac{|E_z(\rho, \varphi, z)|^2}{2} \right]. \quad (7)$$

На рис. 2 представлен электрический диполь, помещенный в центре цилиндра  $l$  радиуса  $\rho_0$  с высотой  $2L$ , который, в свою очередь, вписан в сферу  $2$  радиуса  $a$ , необходимую для сопоставления полученных результатов с оценкой Чу–Маклина. Запасенная энергия  $W_e$  находится интегрированием плотности энергии электрического поля (7) по внешнему (по отношению к цилиндру) объему:

$$W_e = \int_0^{2\pi} \int_{-L}^L \int_{\rho_0}^{\infty} w(\rho, \varphi, z) \rho d\rho dz d\varphi + 2 \int_0^{2\pi} \int_L^{\infty} \int_0^{\rho_0} w(\rho, \varphi, z) \rho d\rho dz d\varphi. \quad (8)$$

В (8) первый интеграл представляет собой энергию, сосредоточенную вне боковой поверхности цилиндра между плоскостями  $z = L$  и  $z = -L$ , а второй – энергию, сосредоточенную в пространстве выше плоскости  $z = L$  и ниже плоскости  $z = -L$ .

Излученную диполем мощность определим по известному [5] соотношению

$$P_a = 20I^2 l^2 k^2. \quad (9)$$

Подставим (8) и (9) с учетом (7), (4) и (5) в (6) и выразим  $\rho_0$  и  $L$  через новые параметры  $a$  и  $\theta_0$  (прил. 2):

$$\rho_0 = a \sin \theta_0; \quad (10)$$

$$L = a \cos \theta_0, \quad (11)$$

где  $\theta_0$  – угол между осью цилиндра и радиусом-вектором, проведенным из центра цилиндра к краю его торца (рис. 2). Таким образом, окончательно получим формулу для предельной добротности антенны, вписанной в цилиндр:

$$Q(ka, \theta_0) = \frac{R_1(\theta_0)}{ka} + \frac{R_2(\theta_0)}{(ka)^3}, \quad (12)$$

где

$$R_1(\theta_0) = \frac{3}{4 \cos \theta_0} \left[ \int_0^1 \frac{3t^2 - \operatorname{tg}^2 \theta_0}{2(t^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_0)^2} dt + \frac{3}{2} \right];$$

$$R_2(\theta_0) = \frac{3}{4 \cos^3 \theta_0} \left[ \int_0^1 \frac{3t^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_0}{2(t^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_0)^3} dt + \frac{1}{2} \right]$$

– поправочные коэффициенты, зависящие от формата антенны.

Из (12) следует, что характер частотной зависимости предельной добротности от электрического радиуса  $ka$  совпадает с теорией Маклина, однако поправочные коэффициенты в числителях

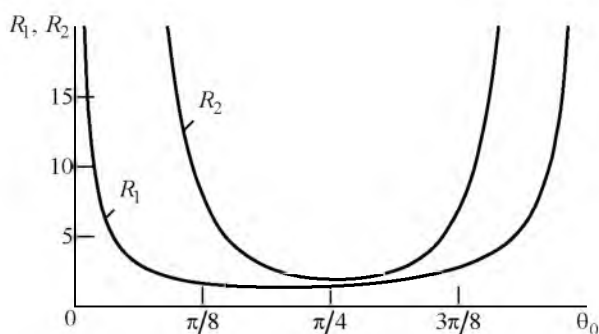


Рис. 3

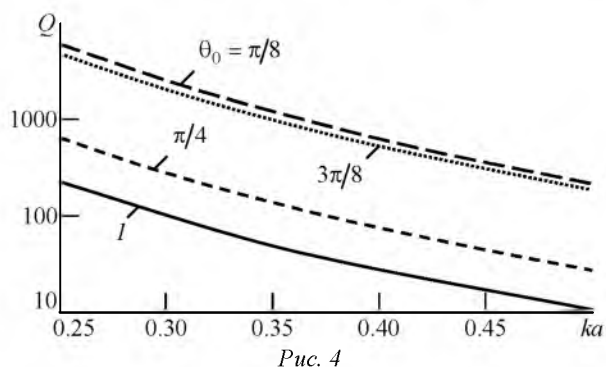


Рис. 4

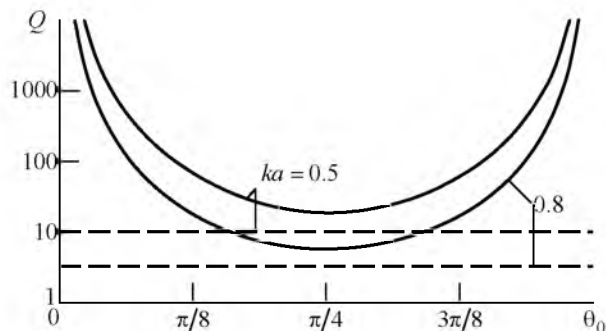


Рис. 5

слагаемых зависят от угла  $\theta_0$  (рис. 3).

На рис. 4 представлены кривые предельной добротности антенн, вписанных в цилиндр, при различных параметрах  $\theta_0$ . Кривая *1* соответствует пределу Чу–Маклина ( $R_1 = 1, R_2 = 1$  [2]). Например, для  $\theta_0 = \pi/4$  ("толстый" цилиндр)  $R_1(\pi/4) = 1.136, R_2(\pi/4) = 1.951$ . В результате нижняя граница добротности оказывается выше границы Чу–Маклина.

Из зависимостей рис. 4 следует, что минимум добротности наблюдается для цилиндра, у которого отношение высоты к диаметру близко к единице, что соответствует  $\theta_0 = \pi/4$ . На рис. 5 представлена зависимость добротности от этого угла при различных значениях  $ka$  (сплошные кривые) в сравнении с пределом Чу–Маклина (штриховые линии). Все зависимости для реальных вибраторов имеют минимум при значениях  $\theta_0$ , близких к  $\pi/4$ . Как и следовало ожидать, во всех случаях предельная добротность Чу–Маклина лежит несколько ниже соответствующих кривых для вибраторов конечных размеров. Возрастание добротности особенно существенно на краях диапазона углов при  $\theta_0 \rightarrow 0$  (предельно тонкий вибратор) и  $\theta_0 \rightarrow \pi/2$  (вибратор переходит в диск).

**Оценка добротности для электрически малой антенны, вписанной в эллипсоид.** Рассмотрим иную постановку: поверхность, описанную вокруг антенны, выберем в виде трехосного эллипсоида (рис. 6), описываемого в декартовой системе координат каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} + \frac{z^2}{r_3^2} = 1.$$

Перейдем в сферическую систему координат и выразим  $R_0$  через остальные параметры сферической системы  $\theta, \varphi$  и параметры декартовой системы  $r_1, r_2, r_3$ . С учетом соотношений, связываю-

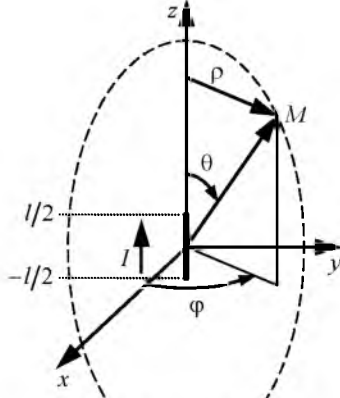


Рис. 6

щих координаты двух систем:  $x = R_0 \sin \theta \cos \varphi$ ;  
 $y = R_0 \sin \theta \sin \varphi$ ;  $z = R_0 \cos \theta$ , имеем:

$$R_0 = r_1 r_2 r_3 \sqrt{\left[ (r_2 r_3)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + (r_1 r_3)^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + (r_1 r_2)^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2}}. \quad (13)$$

Объемная плотность электрической энергии (без составляющей, отражающей потери на излучение) в соответствии с данными из [2] определяется следующим образом:

$$w_e(r, \theta) = 15(I)^2 k \times \left( \frac{4 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{r^4} + \frac{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{k^2 r^6} \right). \quad (14)$$

Проинтегрировав плотность по объему, получим электрическую реактивную энергию:

$$W_e = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R_0} w_e(r, \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (15)$$

Мощность потерь на излучение в силу закона сохранения энергии не зависит от формы охватываемой поверхности и определяется по (9).

Подстановкой (14) в (15) с учетом (13) получим:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{(I)^2 15k}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R_0} \left[ \left( \frac{1}{r^4} + \frac{1}{k^2 r^6} \right) 4 \cos^2 \theta + \left( \frac{1}{k^2 r^6} - \frac{1}{r^4} \right) \sin^2 \theta \right] r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \\ &= \frac{(I)^2 15k}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{4 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{R_0} + \frac{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{3k^2 R_0^3} \right) \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

После замены переменных предельная добротность для электрически малой антенны, вписанной в эллипсоид, принимает вид

$$Q = \frac{I_1}{k^3 (r_1 r_2 r_3)^3} + \frac{I_2}{k r_1 r_2 r_3}, \quad (16)$$

где

$$I_1 = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (3x^2 + 1) (\sqrt{x^2 \alpha + \beta})^3 dx d\varphi;$$

$$I_2 = \frac{3}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (5x^2 - 1) \sqrt{x^2 \alpha + \beta} dx d\varphi;$$

причем

$$\alpha = (r_1 r_2)^2 - \beta; \quad \beta = (r_2 r_3 \cos \varphi)^2 + (r_1 r_3 \sin \varphi)^2.$$

Рассмотрим частные случаи конфигурации задачи.

*Антенна, вписанная в сферу.* В этом случае  $r_1 = r_2 = r_3 = a$ . Тогда из (16) получим:

$$I_1 = \frac{a^6}{4} \int_{-1}^1 (3x^2 + 1) dx = a^6;$$

$$I_2 = \frac{3a^2}{4} \int_{-1}^1 (5x^2 - 1) dx = a^2.$$

Тогда выражение для добротности из (16) приобретает вид

$$Q = \frac{I_1}{k^3 a^9} + \frac{I_2}{ka^3} = \frac{1}{(ka)^3} + \frac{1}{ka},$$

что соответствует оценке Маклина и подтверждает тем самым правильность модели.

*Стержневая антенна, вписанная в эллипсоид вращения.* Пусть эллипсоид вписан в сферу так, что  $r_1 = r_2 = \rho_0 = a \sin \theta_0$ ,  $r_3 = a$  (см. рис. 2, кривая 3). Тогда из (16) имеем:

$$Q = \frac{I_1}{k^3 a^3 \sin^3 \theta_0} + \frac{I_2}{ka \sin \theta_0}, \quad (17)$$

где

$$I_1 = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (3x^2 + 1) (\sqrt{x^2 \alpha + \beta})^3 dx d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (3x^2 + 1) (\sqrt{x^2 (\sin^2 \theta_0 - 1) + 1})^3 dx;$$

$$I_2 = \frac{3}{8\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 (5x^2 - 1) \sqrt{x^2 \alpha + \beta} dx d\varphi =$$

$$= \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (5x^2 - 1) \sqrt{x^2 (\sin^2 \theta_0 - 1) + 1} dx.$$

В пределе для  $\theta_0 \rightarrow \pi/2$  из (17) получим оценку Маклина для антенны, вписанной в сферическую поверхность.

Для малых значений углов  $\theta_0$  (что соответствует электрически малой стержневой антенне) из (17) получим:

$$Q \approx \frac{\frac{1}{4\theta_0^3} \int_{-1}^1 (3x^2 + 1) (\sqrt{1-x^2})^3 dx}{k^3 a^3} +$$

$$+ \frac{\frac{3}{4\theta_0} \int_{-1}^1 (5x^2 - 1) \sqrt{1-x^2} dx}{ka} =$$

$$= \frac{1}{k^3 a^3} \frac{9\pi}{64\theta_0^3} + \frac{1}{ka} \frac{3\pi}{32\theta_0} =$$

$$= \frac{1}{k^3 a^3} \frac{0.442}{\theta_0^3} + \frac{1}{ka} \frac{0.295}{\theta_0}. \quad (18)$$

Дисковая антенна, вписанная в эллипсоид вращения. В этом случае эллипсоид вписан в сферу так, что  $r_1 = r_2 = a$ ,  $r_3 = a \cos \theta_0$ . Тогда из (16) получим:

$$Q = \frac{I_1}{k^3 a^3 \cos^3 \theta_0} + \frac{I_2}{ka \cos \theta_0},$$

где

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (3x^2 + 1) \left( \sqrt{x^2 (1 - \cos^2 \theta_0) + \cos^2 \theta_0} \right)^3 dx;$$

$$I_2 = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (5x^2 - 1) \sqrt{x^2 (1 - \cos^2 \theta_0) + \cos^2 \theta_0} dx.$$

При  $\theta_0 \rightarrow 0$  в этом случае имеем оценку Маклина, а для  $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ , используя асимптотику  $\cos \theta_0 \approx \pi/2 - \theta_0$ , получим оценку добротности для электрически малой антенны дисковой формы:

$$Q = \frac{I_1}{k^3 a^3 (\pi/2 - \theta_0)^3} + \frac{I_2}{ka (\pi/2 - \theta_0)} =$$

$$= \frac{1}{k^3 a^3} \frac{3}{8(\pi/2 - \theta_0)^3} + \frac{1}{ka} \frac{9}{8(\pi/2 - \theta_0)}. \quad (19)$$

Для сопоставления полученных результатов между собой и их сравнения с известной оценкой Маклина представляет интерес рассмотрение вариантов эллиптической поверхности, вписанной в сферу, задаваемых выражениями  $r_1 = r_2 = a \operatorname{tg} \theta_0$ ,  $r_3 = a$ ,  $0 \leq \theta_0 \leq \pi/4$  и  $r_1 = r_2 = a$ ,  $r_3 = \operatorname{arctg} \theta_0$ ,  $\pi/4 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ . В этих случаях, в отличие от цилиндрической поверхности, объем сферы используется более полно.

При первом определении ( $0 \leq \theta_0 \leq \pi/4$ ) имеем:

$$Q = \frac{I_1}{k^3 a^9 (\operatorname{tg} \theta_0)^6} + \frac{I_2}{ka^3 (\operatorname{tg} \theta_0)^2} = \frac{S_1}{k^3 a^3} + \frac{S_2}{ka}, \quad (20)$$

где

$$S_1 = \frac{1}{4(\operatorname{tg} \theta_0)^3} \int_{-1}^1 (3x^2 + 1) \left( \sqrt{x^2 (\operatorname{tg}^2 \theta_0 - 1) + 1} \right)^3 dx;$$

$$S_2 = \frac{3}{4 \operatorname{tg} \theta_0} \int_{-1}^1 (5x^2 - 1) \sqrt{x^2 (\operatorname{tg}^2 \theta_0 - 1) + 1} dx.$$

Для второго определения ( $\pi/4 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ ) получим:

$$Q = \frac{I_1}{k^3 a^9 \operatorname{ctg}^3 \theta_0} + \frac{I_2}{ka^3 \operatorname{ctg} \theta_0} = \frac{T_1}{(ka)^3} + \frac{T_2}{ka}, \quad (21)$$

где

$$T_1 = \frac{1}{4 \operatorname{ctg}^3 \theta_0} \times$$

$$\times \int_{-1}^1 (3x^2 + 1) \left( \sqrt{x^2 (1 - \operatorname{ctg}^2 \theta_0) + \operatorname{ctg}^2 \theta_0} \right)^3 dx;$$

$$T_2 = \frac{3}{4 \operatorname{ctg} \theta_0} \times$$

$$\times \int_{-1}^1 (5x^2 - 1) \sqrt{x^2 (1 - \operatorname{ctg}^2 \theta_0) + \operatorname{ctg}^2 \theta_0} dx.$$

**Результаты расчета добротности.** Зависимости предельной добротности антенны, вписанной в сферу Чу–Маклина электрического радиуса  $ka = 0.6$ , от угла  $\theta_0$ , характеризующего формат антенны, приведены на рис. 7. Прямая 1 представляет классический предел Чу–Маклина, кривая 2 – результат, полученный по (12) для вписанной в цилиндр антенны, кривые 3 и 4 соответствуют асимптотическим оценкам по (18) и (19) соответственно, кривая 5 получена для эллиптической поверхности в соответствии с (20), (21).

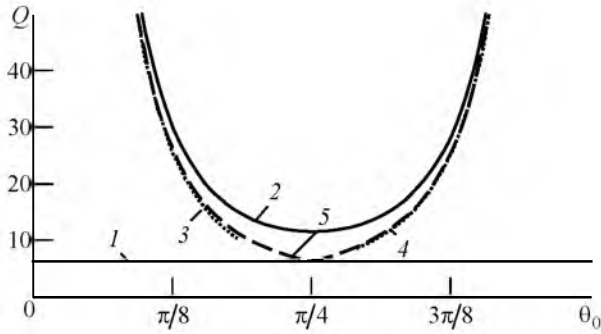


Рис. 7

Анализируя полученные результаты, необходимо отметить ряд практически важных моментов.

1. Все антенны вписаны в сферу электрического радиуса  $ka$ , поэтому оценка Маклина является состоятельной оценкой "снизу", т. е. добротности всех антенн превосходят 1. Из зависимостей на рис. 7 следует, что добротности антенн, чья форма заметно отличается от сферической, значительно превышают оценку Маклина. Таким образом, наглядно проявляется тот факт, что не только радиус описанной сферы, но и форма электрически малой антенны имеет решающее значение для оценки ее добротности. Этот факт объясняется возрастанием запасенной реактивной энергии с указанным отклонением формы.

2. Кривая 2 для антенны цилиндрической формы показывает, что оценка Маклина наиболее точно соответствует минимальной добротности для цилиндра с размером  $L = \rho_0$  ( $\theta_0 = \pi/4$ ), причем по мере отклонения угла от этого значения добротность резко возрастет. В точке минимума отличие добротности от оценки Маклина обусловлено неполным использованием объема сферы цилиндрическим объемом. В этом смысле показательной является кривая 5, соответствующая эллиптической поверхности, более полно использующей объем сферы. Эта кривая всюду идет ниже кривой 2 и при  $\theta_0 = \pi/4$  ввиду полного совпадения эллиптической и исходной сферической поверхностей дает количественное совпадение с теорией Маклина.

Асимптотические формулы для добротности тонкого стержня (18) и плоского диска (19) дают возможность оперативно выполнить оценку добротности для антенн такого предельного формата, однако применение их к оценке широкополосности реальных антенн может дать значительную погрешность ввиду сильно идеализированного токового распределения источника (диполя Герца).

**Приложение 1. Выражение для электрического поля диполя Герца в цилиндрической системе координат.** Магнитное поле, вычисленное по (2), имеет вид

$$\mathbf{H}(\rho, \varphi, z) = \mathbf{e}_\varphi \frac{Il}{4\pi} \rho \exp(-ik\sqrt{\rho^2 + z^2}) \times \left[ ik(\rho^2 + z^2)^{-1} + (\rho^2 + z^2)^{-3/2} \right].$$

Электрическое поле в соответствии с (3):

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = \mathbf{e}_\rho E_\rho(\rho, \varphi, z) + \mathbf{e}_z E_z(\rho, \varphi, z),$$

где

$$E_\rho(\rho, \varphi, z) = \frac{IlZ_0 \exp(-ik\sqrt{\rho^2 + z^2})}{4\pi} \times \left[ \frac{ik\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3ipz}{k(\rho^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{3\rho z}{(\rho^2 + z^2)^2} \right];$$

$$E_z(\rho, \varphi, z) = \frac{IlZ_0 \exp(-ik\sqrt{\rho^2 + z^2})}{4\pi} \times \left[ \frac{i(\rho^2 - z^2)}{k(\rho^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{ik\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{2z^2 - \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^2} \right].$$

**Приложение 2. Вычисление реактивной мощности.** Найдем плотность энергии электрического поля (7), используя (4), (5). Слагаемые, описывающие плотность энергии распространяющихся компонентов электрического поля (пропорциональные  $1/r^2$ ), при вычислении реактивной мощности должны быть отброшены.

В итоге для плотности энергии электрического поля имеем:

$$w(\rho, \varphi, z) = \frac{I^2 I^2 \mu}{2(4\pi)^2} \times \left[ \frac{\rho^4 + 4z^4 + 5\rho^2 z^2}{k^2(\rho^2 + z^2)^5} + \frac{3\rho^2 z^2 + 4z^4 - \rho^4}{(\rho^2 + z^2)^4} \right].$$

Подставив полученное выражение в (9), выполним замены переменных  $x = \rho^2$ ,  $dx = 2\rho d\rho$  и  $y = x + z^2$ ,  $dy = dx$ , а также  $\int_{-L}^L dz = 2 \int_0^L dz$ . Далее, интегрируя по  $y$  и сделав во внешнем интеграле замену переменных  $t = z/L$ , с учетом (10) и (11) получим:

$$W_e = \frac{\pi I^2 l^2 \mu}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{k^2 a^3 \cos^3 \theta_0} \int_0^1 \left[ \frac{1}{2(t^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_0)^2} + \frac{t^2}{(t^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_0)^3} \right] dt + \frac{1}{2k^2 a^3 \cos^3 \theta_0} + \right. \\ \left. + \frac{1}{a \cos \theta_0} \int_0^1 \left[ \frac{5t^2}{2(t^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_0)^2} - \frac{1}{t^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_0} \right] dt + \frac{3}{2a \cos \theta_0} \right\}$$

Далее по (6) с учетом (8) получим окончательную формулу предела добротности (12).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chu L. J. Physical Limitations of Omni-Directional Antennas // J. of Applied Physics. 1948. Vol. 19, № 12. P. 1163–1175.
2. McLean J. S. A Re-examination of the Fundamental Limits on the Radiation Q of Electrically Small Antennas // IEEE Transactions on Ant. and Prop. 1996. Vol. AP-44, № 5. P. 672–676.
3. Марков Г. Т., Сазонов Д. М. Антенны: учеб. для студентов радиотехнических специальностей вузов. 2-е изд. М.: Энергия, 1975. 528 с.
4. Одинцов А. Ю., Сугак М. И. Предельная добротность электрически малых антенн, вписанных в цилиндр // Сб. докл. Юбилейной 70-й Всерос. науч.-техн. конф., посвященной Дню радио. Санкт-Петербург, 21–29 апр. 2015 г. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2015. С. 5–6.

S. V. Ballandovich, L. M. Liubina, A. Yu. Odintzov, M. I. Sugak  
Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI"

#### The Limiting Quality Factor of Electrically Small Antennas Inscribed into a Cylinder and an Ellipsoid

*The estimations of the bound of the quality factor for electrically small antennas inscribed in a cylinder and the triaxial ellipsoid are obtained. For antennas whose shape is far from spherical, the above estimation allows to refine the Chu-McLean limit.*

Electrically Small Antenna, Ellipsoid, Quality Factor, Chu–McLean Limit

Статья поступила в редакцию 6 июня 2016 г.