

Y. A. Nikitin

Saint-Petersburg branch "Leningrad department of Research institute of radio"

Modeling single sideband of digital frequency conversion in the path of bringing multiplies PLL*To reduce the level of phase noise in the near zone offset from the carrier wave is desirable to reduce the factor of division in the PLL.*

Cast tract, digital frequency synthesis, impulse PLL, pulse counter, the vernier frequency division, adder modulo 2

Статья поступила в редакцию 11 февраля 2014 г.

УДК 519.725.3

Данг Ким Нгок

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ"

Использование верхней границы вероятности битовой ошибки для поиска хороших сверточных кодов*Приведены алгоритм и результаты расчета верхней границы вероятности битовой ошибки по усеченной передаточной функции сверточного кода. Представлены результаты поиска хороших кодов со скоростями 1/2, 1/3, 1/4 по критерию верхней границы битовой ошибки.***Сверточный код, верхняя граница, усеченная передаточная функция, вероятность битовой ошибки**

Общепринято сравнивать сверточные коды по вероятности битовой ошибки [1]. Эффективность кода тем больше, чем меньше вероятность битовой ошибки P_b . Эта вероятность может вычисляться с помощью машинного моделирования алгоритмов декодирования, что требует значительного времени, особенно при малой P_b и больших кодовых ограничениях. Поэтому для поиска хороших сверточных кодов используются три критерия: поиск по максимальным свободным расстояниям [2], поиск по профилю оптимального расстояния [3] и поиск по спектру оптимального расстояния (COP) [4]. Лучшим считается критерий поиска по спектру оптимального расстояния.

В настоящей статье для поиска хороших сверточных кодов предложено использовать верхнюю границу вероятности битовой ошибки.

Корректирующие свойства сверточного кода определяются передаточной функцией [1]:

$$T(D, N) = \sum_{d=d_{cb}}^{\infty} a_d N^{f_d} D^d, \quad (1)$$

где d – расстояние Хэмминга рассматриваемого пути от нулевого пути; d_{cb} – свободное расстояние кода; a_d – число путей с расстоянием d от нулевого пути; N, D – длины входной и выходной последовательностей соответственно; f_d – вес входной последовательности с расстоянием d .

С функцией $T(D, N)$ связана верхняя граница вероятности ошибки на бит:

$$R_b \leq \left. \frac{dT(D, N)}{dN} \right|_{N=1} = \sum_{d=d_{cb}}^{\infty} c_d D^d \Big|_{D=e^{-R \frac{E_b}{N_0}}}, \quad (2)$$

где c_d – число битовых ошибок для путей с расстоянием d ; R – скорость кодирования; E_b – энергия бита; N_0 – спектральная плотность мощности шума.

Верхняя граница характеризует эффективность сверточного кода. Однако ее точное вычисление требует больших временных затрат. Поэтому в настоящей статье рассмотрен расчет верхней границы по усеченной передаточной функции сверточного кода при учете путей с расстояниями $d = d_{cb}$,

$d_{св} + 1, \dots, d_{св} + L_{yc}$, где L_{yc} – количество слагаемых передаточной функции усеченного кода. При этом выражения (1), (2) преобразуются к виду

$$T(D) \approx \sum_{d=d_{св}}^{d_{св}+L_{yc}} a_d D^d; R_b \approx \sum_{d=d_{св}}^{d_{св}+L_{yc}} c_d D^d \Big|_{D=e^{-R \frac{E_b}{N_0}}}$$

В табл. 1 приведены значения верхней границы вероятности ошибок битов R_b при усеченной передаточной функции $L_{yc} = 10, 15, 20, 25$ для известного сверточного кода $C(23, 35)$, применяемого в системах мобильной связи стандарта GSM, лучшего по критерию COP [4]. Из приведенных значений следует, что слабая зависимость $R_b(L_{yc})$ проявляется лишь при малых значениях E_b/N_0 , а с их ростом эта зависимость сходит на нет. Следовательно, влияние слагаемых высоких степеней передаточной функции на значения R_b при высоком отношении E_b/N_0 незначительно. Таким образом, $L_{yc} = 10$, значительно уменьшающее объем вычислений, репрезентативно и для других значений L_{yc} .

Для поиска хороших сверточных кодов с разными кодовыми ограничениями в указанном множестве разработана программа в MATLAB для

определения верхней границы вероятности битовой ошибки по усеченной передаточной функции. Программа реализует поиск кодов во множестве мощности M , которая быстро увеличивается с ростом ограничения K . Например для кодов со скоростью $1/2$, мощность M определяется выражением $M = 3(2^{2K-3} - 2^{K-2})$. Для ускорения поиска из множества исключаются катастрофические коды, эквивалентные коды и коды, которые имеют порождающие полиномы четной степени. Катастрофический код является кодом, при декодировании которого возникает неограниченное число ошибок [1]. Эквивалентный код обладает кодовой решеткой, передаточной функцией и верхней границей битовой ошибки, близкими к параметрам известного кода [5]. Например коды $C(17,15)$, $C(13,17)$ и $C(17,13)$, эквивалентны известному коду $C(15,17)$. Коды, имеющие порождающие полиномы четной степени, эквивалентны кодам, имеющим меньшее кодовое ограничение. Например код $C(16,14)$, эквивалентен коду $C(7,6)$ с кодовым ограничением 3. Реализованный метод отброса позволяет отбраковать до 75 % множества возможных сверточных кодов [6] до реализации процедуры определения верхней границы битовой ошибки.

На рис. 1 приведены зависимости $R_b(E_b/N_0)$ для сверточных кодов $C(51, 77)$ и $C(53, 75)$ с кодовым ограничением $K = 6$ [4]. Из них следует, что при $E_b/N_0 \leq 6.9$ дБ верхняя граница вероятности ошибок битов сверточного кода $C(51, 77)$ ниже верхней границы кода $C(53, 75)$, а при $E_b/N_0 > 6.9$ дБ верхняя граница кода $C(51, 77)$ выше верхней границы кода $C(53, 75)$. Следовательно, при $K = 6$ существуют два хороших сверточных кода с близкими характеристиками.

В результате расчета зависимостей верхней границы вероятности битовой ошибки R_b от отношения E_b/N_0 выявлены хорошие сверточные коды по критерию минимальной вероятности би-

Таблица 1

E_b/N_0 , дБ	L_{yc}			
	10	15	20	25
	R_b			
3.0	$2.68 \cdot 10^{-3}$	$3.34 \cdot 10^{-3}$	$3.69 \cdot 10^{-3}$	$3.88 \cdot 10^{-3}$
3.5	$7.14 \cdot 10^{-4}$	$7.79 \cdot 10^{-4}$	$7.98 \cdot 10^{-4}$	$8.03 \cdot 10^{-4}$
4.0	$1.84 \cdot 10^{-4}$	$1.89 \cdot 10^{-4}$	$1.90 \cdot 10^{-4}$	$1.90 \cdot 10^{-4}$
4.5	$4.54 \cdot 10^{-5}$	$4.57 \cdot 10^{-5}$	$4.57 \cdot 10^{-5}$	$4.57 \cdot 10^{-5}$
5.0	$1.04 \cdot 10^{-5}$	$1.04 \cdot 10^{-5}$	$1.04 \cdot 10^{-5}$	$1.04 \cdot 10^{-5}$
5.5	$2.17 \cdot 10^{-6}$	$2.17 \cdot 10^{-6}$	$2.17 \cdot 10^{-6}$	$2.17 \cdot 10^{-6}$
6.0	$3.97 \cdot 10^{-7}$	$3.97 \cdot 10^{-7}$	$3.97 \cdot 10^{-7}$	$3.97 \cdot 10^{-7}$
6.5	$6.20 \cdot 10^{-8}$	$6.20 \cdot 10^{-8}$	$6.20 \cdot 10^{-8}$	$6.20 \cdot 10^{-8}$
7.0	$8.02 \cdot 10^{-9}$	$8.02 \cdot 10^{-9}$	$8.02 \cdot 10^{-9}$	$8.02 \cdot 10^{-9}$
7.5	$8.37 \cdot 10^{-10}$	$8.37 \cdot 10^{-10}$	$8.37 \cdot 10^{-10}$	$8.37 \cdot 10^{-10}$
8.0	$6.81 \cdot 10^{-11}$	$6.81 \cdot 10^{-11}$	$6.81 \cdot 10^{-11}$	$6.81 \cdot 10^{-11}$
8.5	$4.19 \cdot 10^{-12}$	$4.19 \cdot 10^{-12}$	$4.19 \cdot 10^{-12}$	$4.19 \cdot 10^{-12}$
9.0	$1.87 \cdot 10^{-13}$	$1.87 \cdot 10^{-13}$	$1.87 \cdot 10^{-13}$	$1.87 \cdot 10^{-13}$
9.5	$5.83 \cdot 10^{-15}$	$5.83 \cdot 10^{-15}$	$5.83 \cdot 10^{-15}$	$5.83 \cdot 10^{-15}$
10.0	$1.21 \cdot 10^{-16}$	$1.21 \cdot 10^{-16}$	$1.21 \cdot 10^{-16}$	$1.21 \cdot 10^{-16}$
10.5	$1.58 \cdot 10^{-18}$	$1.58 \cdot 10^{-18}$	$1.58 \cdot 10^{-18}$	$1.58 \cdot 10^{-18}$
11.0	$1.24 \cdot 10^{-20}$	$1.24 \cdot 10^{-20}$	$1.24 \cdot 10^{-20}$	$1.24 \cdot 10^{-20}$

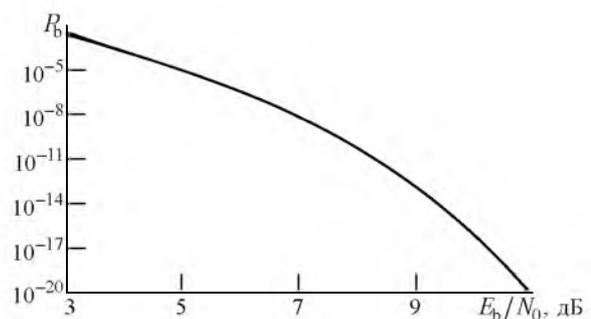


Рис. 1

товой ошибки. Указанные коды для скоростей 1/2, 1/3 и 1/4 сведены в табл. 2–4 соответственно.

Некоторые из найденных кодов совпадают с известными кодами по критерию СОР [4]. Наряду с этим найдены новые коды, имеющие меньшую вероятность R_b в определенных диапазонах отношения E_b/N_0 . К таким кодам, например относятся коды со скоростью 1/2 $C(51,77)$, $C(225,363)$, $C(523,731)$, $C(2153,3705)$.

Кроме того, при одинаковых кодовых ограничениях существуют несколько хороших сверточных кодов, отличающихся вероятностями битовой ошибки при разных отношениях E_b/N_0 . Так, среди кодов со скоростью 1/3 и $K=9$ код $C(471,753,765)$ лучше других при $E_b/N_0 < 4.5$ дБ, код $C(471,533,765)$ лучший при $4.5 \leq E_b/N_0 < 8.31$ дБ, код $C(575,623,727)$ лучший при $E_b/N_0 > 8.31$ дБ.

Таблица 2

K	Код	E_b/N_0 , дБ		$d_{св}$	Комментарий
		Не более	Не менее		
3	$C(5,7)$	–	–	5	Лучший по критерию СОР [4]
4	$C(15,17)$	–	–	6	То же
5	$C(23,35)$	–	–	7	<< <<
6	$C(51,77)$	6.9	–	8	Новый
	$C(53,75)$	–	6.9	8	Лучший по критерию СОР [4]
7	$C(133,171)$	5.3	6.64	10	То же
	$C(135,161)$	5.3	6.64	9	Новый
8	$C(255,363)$	5.44	–	10	То же
	$C(247,371)$	–	5.44	10	Лучший по критерию СОР [4]
9	$C(523,731)$	4.84	–	11	Новый
	$C(561,753)$	–	4.84	12	Лучший по критерию СОР [4]
10	$C(1151,1753)$	–	–	12	То же
11	$C(2153,3705)$	7.65	–	13	Новый
	$C(3345,3613)$	–	7.65	14	Лучший по критерию СОР [4]

Таблица 3

K	Код	E_b/N_0 , дБ		$d_{св}$	Комментарий
		Не более	Не менее		
3	$C(5, 7, 7)$	–	–	8	Лучший по критерию СОР [4]
4	$C(11, 15, 17)$	5.24	–	9	Новый
	$C(13, 15, 17)$	–	5.24	10	Лучший по критерию СОР [4]
5	$C(27, 31, 35)$	6.0	–	11	Новый
	$C(25, 33, 37)$	–	6.0	12	Лучший по критерию СОР [4]
6	$C(43, 55, 75)$	4.66	–	12	Новый
	$C(47, 53, 75)$	–	4.66	13	Лучший по критерию СОР [4]
7	$C(133, 145, 171)$	7.0	–	14	Новый
	$C(133, 165, 171)$	–	7.0	15	Лучший по критерию СОР [4]
8	$C(225, 331, 367)$	–	–	16	То же
9	$C(471, 573, 765)$	4.5	–	18	Новый
	$C(471, 533, 765)$	4.5	8.31	18	То же
	$C(575, 623, 727)$	–	8.31	18	Лучший по критерию СОР [4]

Таблица 4

K	Код	E_b/N_0 , дБ		$d_{св}$	Комментарий
		Не более	Не менее		
3	$C(5, 5, 7, 7)$	–	–	10	Лучший по критерию СОР [4]
4	$C(11, 13, 15, 17)$	7.37	–	12	Новый
	$C(13, 15, 15, 17)$	–	7.37	13	Лучший по критерию СОР [4]
5	$C(23, 27, 31, 35)$	6.49	–	14	Новый
	$C(25, 33, 35, 37)$	–	6.49	15	Лучший по критерию СОР [4]
6	$C(47, 53, 65, 75)$	3.77	–	17	Новый
	$C(45, 55, 73, 77)$	–	3.77	18	Лучший по критерию СОР [4]
7	$C(113, 127, 155, 171)$	5.35	–	19	Новый
	$C(117, 133, 165, 171)$	–	5.35	20	Лучший по критерию СОР [4]
8	$C(225, 267, 323, 371)$	5.29	–	21	Новый
	$C(231, 273, 327, 375)$	–	5.29	22	Лучший по критерию СОР [4]
9	$C(427, 531, 665, 763)$	4.25	–	23	Новый
	$C(473, 513, 671, 765)$	–	4.25	24	Лучший по критерию СОР [4]

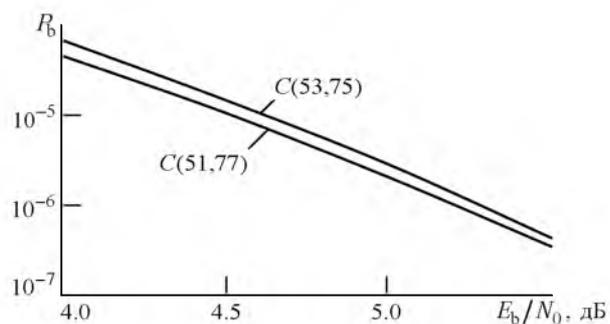


Рис. 2

Полученные зависимости для некоторых кодов с $K=6$ приведены на рис. 2 (коды $C(51, 77)$, $C(53, 75)$), а для $K=8$ – на рис. 3 (коды $C(225, 363)$, $C(247, 371)$). Среди этих кодов коды $C(53,75)$ и $C(247,371)$ являются наилучшими сверточными кодами по критерию СОР [4].

Результаты проведенных исследований показали, что анализ верхней границы вероятности

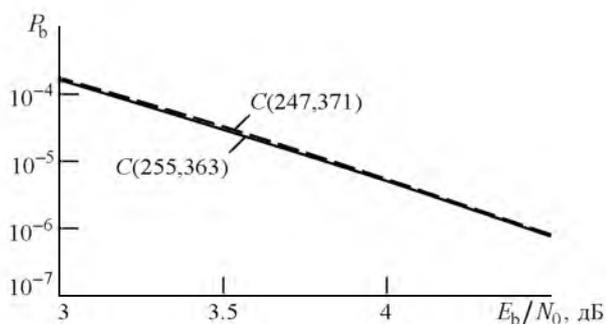


Рис. 3

битовой ошибки по усеченной передаточной функции позволяет оценить эффективность сверточного кода. По критерию верхней границы вероятности битовой ошибки найдены новые хорошие сверточные коды, имеющие лучшую эффективность, чем известные коды в определенных диапазонах вероятности битовой ошибки.

Список литературы

1. Proakis J. G., Salehi M. Digital communication. McGraw-Hill, San Diego, 2007. 928 p.
2. Larsen K. J. Short convolutional codes with maximal free distance for rates 1/2, 1/3, and 1/4 // IEEE Trans. on information theory. 1973. Vol. 19, № 3. P. 371–372.
3. Johannesson R. Robustly optimal rate one-half binary convolutional codes // IEEE Trans. on information theory. 1975. Vol. 21, № 4. P. 464–468.
4. Frenger P., Orten P., Ottosson T. Convolutional codes with optimum distance spectrum // IEEE Com. letters. 1999. Vol. 3, № 11. P. 317–319.
5. Tang Hung-Hua, Lin Mao-Chao, Bartolomeu F. U. F. Minimal trellis modules and equivalent convolutional codes // IEEE Trans. on information theory. 2006. Vol. IT-52, № 8. P. 3738–3746.
6. Bocharova I. E., Kudyashov B. D. Rational rate punctured convolutional codes for soft-decision Viterbi decoding // IEEE Trans. on information theory. 1997. Vol. IT-43, № 4. P. 1035–1313.

Dang Kim Ngoc

Saint-Petersburg state electrotechnical university "LETI"

Use upper bound probability to find good convolutional codes

The algorithm and results of calculation of the upper bound of a bit mistake probability of a convolution code on the truncated transfer function is given. Search results of good codes with rates of 1/2, 1/3, 1/4 by criterion of the upper bound of a bit mistake are presented.

Convolution code, upper bound, truncated transfer function, bit error probability

Статья поступила в редакцию 12 февраля 2014 г.