УДК 621.396.96

И. В. Гоголев
АО «НИИ "Вектор"» (Санкт-Петербург)

Граница Крамера–Рао оценки доплеровской деформации и задержки сигнала с произвольной шириной спектра

Представлены границы Крамера–Рао дисперсии совместных оценок доплеровской деформации и задержки для ситуации, когда ширина спектра сигнала не позволяет применить рассмотрение в рамках узкополосной модели. Рассмотрены два подхода: оценка всех неизвестных параметров сигнала, в том числе и начальной фазы, и усреднение функционала правдоподобия по его заданному априорному распределению. Показано, что дисперсии оценок одинаковы для обоих способов решения задачи.

Доплеровская деформация, граница Крамера–Рао, матрица Фишера, случайная фаза

В стандартной модели измерений [1], [2] эхо

$$\dot{r}(t) = \dot{s}[t - \tau(t)]^{1}$$

излученного локатором сигнала $\dot{s}(t)$ принимается с запаздыванием $\tau(t)$. При ненулевой относительной радиальной скорости $v(t)$ оно оказывается деформированным относительно $\dot{s}(t)$ вследствие эффекта Доплера.

В узкополосной модели сигнала деформацией огибающей пренебрегают и эффект Доплера сводится к сдвигу центральной частоты сигнала $\omega_{\text{с}}$ на величину $\omega_{\text{Д}} = (2v/c)\omega_{\text{с}}$, где c – скорость распространения электромагнитных колебаний.

Можно показать (см., например, [2]), что описание эффекта Доплера с помощью единственного параметра $\omega_{\text{Д}}$ является следствием разложения полной модели измерений по параметру $B/\omega_{\text{с}}$, где B – ширина спектра огибающей.

Для некоторых задач радиолокации, гидроакустики, а также пассивной локации [2]–[4] узкополосная модель перестает быть адекватной проводимым измерениям и информативными параметрами, подлежащими оценке, являются запаздывание τ и фактор доплеровской деформации (масштаб) σ.

В реальных задачах оценивания сигналы содержат помимо информационных параметров и мешающие, такие, как амплитуда и начальная фаза. Незнание априорных плотностей исключает возможность нахождения байесовских оценок [5]. В этом случае переходят к критерию несмещенности и минимума условной дисперсии оценок. Особенность такого подхода заключается в том, что введенный критерий не ведет явно к конкретному правилу оценки, но именно такими асимптотическими свойствами обладает оценка по максимуму правдоподобия (ОМП). При этом нижний предел условной дисперсии любой несмещенной оценки определяется границей Крамера–Рао.

Для выяснения перспектив применения модели сигнала, не ограниченной узкополосными разложениями, необходимо вычислить нижнюю границу дисперсии оценки введенных параметров.

Постановка задачи. В общем виде принятая реализация $\dot{r}(t)$ рассматривается как функция времени t, вектора измеряемых информативных параметров $\{\tau, \sigma\}$, мешающих параметров – амплитуды a и случайной начальной фазы φ, а также содержит и помеховую составляющую:

$$\dot{r}(t) = \dot{s}(t, a, \tau, \sigma, \varphi) + \dot{n}(t) = \\ = a\dot{s}\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)e^{i\varphi} + \dot{n}(t), \qquad (1)$$

где $\dot{n}(t)$ – вклад белого гауссовского шума со спектральной плотностью N_0. При дальнейшем рассмотрении предполагается, что априорные плотности вероятности информационных пара-

[1] Точки над обозначениями переменных указывают на аналитические сигналы.

метров и амплитуды неизвестны, а фаза распределена равномерно на интервале $[0,\ 2\pi]$.

Стандартную задачу – формирование уравнений для получения оценки и вычисление ее дисперсии – при большом отношении "сигнал/шум" можно решать по методу максимального правдоподобия. Известно [1], [5], что максимально правдоподобные оценки асимптотически состоятельны и эффективны, т. е. их дисперсия совпадает с нижней границей Крамера–Рао (НГКР).

При такой постановке оценка определяется как координата максимума функционала правдоподобия (ФП) $W[\dot{r}(t)|\boldsymbol{\theta}]$, где $\boldsymbol{\theta}$ – вектор параметров сигнала, а дисперсии компонент удовлетворяют неравенству

$$D\{\theta_i|\boldsymbol{\theta}\} \ge \Phi_{ii}^{-1}. \qquad (2)$$

Здесь θ_i – i-я компонента вектора $\boldsymbol{\theta}$; Φ_{ii}^{-1} – диагональный элемент матрицы, обратной информационной матрице Фишера

$$\Phi_{ij} = -\overline{\frac{d^2 \ln W[\dot{r}(t)|\boldsymbol{\theta}]}{d\theta_i d\theta_j}}.$$

Таким образом, задача сводится к формированию ФП $W[\dot{r}(t)|\boldsymbol{\theta}]$ и вычислению Φ_{ij}.

Вид ФП в рамках ОМП может быть различным в зависимости от выбранного способа разрешения затруднений, связанных с мешающими неинформационными параметрами.

Первый подход предполагает оценивание всех неизвестных параметров сигнала и дальнейшее отбрасывание неинформационных параметров. Это приводит к увеличению вектора измеряемых параметров, а для сигнала (1) – к увеличению размеров информационной матрицы до 4 × 4.

Второй подход основан на усреднении функционала правдоподобия по мешающему параметру с учетом его априорного распределения. Для рассматриваемого случая усреднение по фазе приводит к информационной матрице с размерами 3 × 3.

Из введенного описания не очевидно, что дисперсии оценки информационных параметров, вычисленные в соответствии с (2) с усреднением ФП по фазе и без такого усреднения, одинаковы и соответствуют НГКР. В настоящей статье представлено доказательство такого равенства.

Оценка с усреднением ФП по фазе. ФП реализации $\dot{r}(t)$ при условии наличия в ней сигнала имеет вид

$$W[\dot{r}(t)|a,\ \tau,\ \sigma,\ \varphi] = \\ = k\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[\dot{r}(t) - a\dot{s}\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)e^{i\varphi}\right]\times\right.\right. \\ \left.\left.\times\left[\dot{r}^*(t) - a\dot{s}^*\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)e^{-i\varphi}\right]dt\right\}\right), \qquad (3)$$

где k – произвольная константа; "*" – символ комплексного сопряжения. Так как случайная фаза сигнала является неинформативной величиной с известной априорной плотностью вероятности, можно усреднить ФП по всем τ с учетом известного распределения фазы:

$$W[\dot{r}(t)|\boldsymbol{\theta}] = \int W[\dot{r}(t)|\boldsymbol{\theta},\ \varphi]W(\varphi)d\varphi,$$

где $\boldsymbol{\theta} = \{a,\ \tau,\ \sigma\}$ – вектор измеряемых параметров.

После усреднения по фазе при больших соотношениях "сигнал/шум" ФП приобретает вид

$$W[\dot{r}(t)|\boldsymbol{\theta}] = k\exp\left[-\frac{E_s(\boldsymbol{\theta})}{N_0} + \frac{2Z(\boldsymbol{\theta})}{N_0}\right], \qquad (4)$$

где

$$E_s(\boldsymbol{\theta}) = a^2\int \dot{s}\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)\dot{s}^*\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)dt;$$

$$Z(\boldsymbol{\theta}) = \left|\int \dot{r}(t)a\dot{s}(t)^*\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)dt\right|.$$

Так как максимум ФП (4) достигается в той же точке, что и максимум логарифма ФП, то процедура вычисления оценки заключается в решении системы уравнений

$$\frac{\partial \ln W[\dot{r}(t)|\boldsymbol{\theta}]}{\partial\theta_i} = 0.$$

Элементы матрицы Фишера вычисляются как соответствующие производные логарифма (4) в точке правильного решения $a = a_0$; $\tau = \tau_0$; $\sigma = \sigma_0$. Результат можно записать в виде

$$\Phi_3 = \frac{2a_0^2 E_0}{N_0\sigma_0}\times \\ \times\begin{bmatrix} \sigma_0{}^2/a_0^2 & 0 & \sigma_0/(2a_0) \\ 0 & \overline{\Omega^2} - \overline{\Omega}^2 & \overline{t\Omega^2} - \overline{\Omega}\,\overline{t\Omega} \\ \sigma_0/(2a_0) & \overline{t\Omega^2} - \overline{\Omega}\,\overline{t\Omega} & \overline{t^2\Omega^2} - \overline{t\Omega}^2 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Выражения, входящие в матрицу Фишера (5), определяются следующим образом:

$$\overline{\Omega} = -\frac{1}{E_0}\mathrm{Im}\int \dot{s}(t)\dot{s}'^*(t)dt; \qquad (6)$$

$$\overline{t\Omega} = -\frac{1}{E_0}\operatorname{Im}\int t\dot{s}(t)\,\dot{s}'^{*}(t)\,dt; \qquad (7)$$

$$\overline{\Omega^2} = \frac{1}{E_0}\int\left|\dot{s}(t)\right|^2 dt; \qquad (8)$$

$$\overline{t\Omega^2} = \frac{1}{E_0}\int t\left|\dot{s}'(t)\right|^2 dt; \qquad (9)$$

$$\overline{t^2\Omega^2} = \frac{1}{E_0}\int t^2\left|\dot{s}'(t)\right|^2 dt, \qquad (10)$$

причем

$$E_0 = \int \dot{s}\left(\frac{t-\tau_0}{\sigma_0}\right)\dot{s}^{*}\left(\frac{t-\tau_0}{\sigma_0}\right)dt; \qquad (11)$$

верхней чертой обозначено усреднение по времени; штрихом – производная по времени.

В (6)–(11) форма обозначений выбрана с целью подчеркнуть аналогию с результатами, известными для узкополосной модели. Зависимость матричных элементов матрицы Фишера (5) от выбора начала отсчета подробно исследована в [6]–[8] и далее не рассматривается.

Дисперсии оценки информационных параметров τ и σ вычисляются в соответствии с (2):

$$D_\tau = \frac{1}{\det\Phi_3}\bar{M}_{22};\ D_\sigma = \frac{1}{\det\Phi_3}\bar{M}_{33},$$

где $\bar{M}_{ii}$ – дополнительный минор элемента Φ_{3ii} матрицы Φ_3. После несложных вычислений получим:

$$D_\tau = \frac{N_0\sigma_0}{2a_0^2E_0}\frac{\left(\overline{t^2\Omega^2}-\overline{t\Omega}^2\right)-1/4}{D}; \qquad (12)$$

$$D_\sigma = \frac{N_0\sigma_0}{2a_0^2E_0}\frac{\overline{\Omega^2}-\bar{\Omega}^2}{D}, \qquad (13)$$

где

$$D = \left(\overline{\Omega^2}-\bar{\Omega}^2\right)\left[\left(\overline{t^2\Omega^2}-\overline{t\Omega}^2\right)-1/4\right]+ \\ +\left(\overline{t\Omega^2}-\bar{\Omega}\overline{t\Omega}\right)^2.$$

Оценка полного вектора параметров сигнала. Перепишем исходный функционал правдоподобия (3):

$$W\left[\dot{r}(t)\middle|a,\ \tau,\ \sigma,\ \varphi\right] = \\ = k\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[\dot{r}(t)-a\dot{s}\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)e^{i\varphi}\right]\times\right.\right. \\ \left.\left.\times\left[\dot{r}^{*}(t)-a\dot{s}^{*}\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)e^{-i\varphi}\right]dt\right\}\right).$$

Записав вектор измеряемых параметров как $\boldsymbol{\theta}=\{a,\ \tau,\ \sigma,\ \varphi\}$ и раскрыв скобки под интегралом, получим:

$$W\left[\dot{r}(t)\middle|\boldsymbol{\theta}\right] = \\ = k\exp\left\{-\frac{E_s(a,\ \tau,\ \sigma)}{N_0}+\frac{2\operatorname{Re}\left[z(\boldsymbol{\theta})\right]}{N_0}\right\}, \qquad (14)$$

где

$$E_s(a,\ \tau,\ \sigma) = a^2E_0(\tau,\ \sigma) = \\ = a^2\int\dot{s}\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)\dot{s}^{*}\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)dt;$$

$$z(\boldsymbol{\theta}) = \int\dot{r}(t)\,a\dot{s}(t)^{*}\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)\exp(-i\varphi)\,dt.$$

Матрица Фишера для ФП (14) имеет вид

$$\Phi_4 = \frac{2a_0^2E_0}{N_0\sigma_0}\times \\ \times\begin{bmatrix} \sigma_0^2/a_0^2 & 0 & \sigma_0/(2a_0) & 0 \\ 0 & \overline{\Omega^2} & \overline{t\Omega^2} & \bar{\Omega} \\ \sigma_0/(2a_0) & \overline{t\Omega^2} & \overline{t^2\Omega^2} & \overline{t\Omega} \\ 0 & \bar{\Omega} & \overline{t\Omega} & \sigma_0^2 \end{bmatrix}. \qquad (15)$$

Элементы информационной матрицы оценки вектора параметров $\boldsymbol{\theta}=\{a,\ \tau,\ \sigma,\ \varphi\}$ определены в [9], но полученный в ней результат нельзя считать верным, так как в указанной работе принято $\Phi_{13}=\Phi_{a\sigma}=0$, что приводит к выводу о некоррелированности измерений амплитуды и деформации сигнала. В полученной матрице (15) отмеченная ошибка устранена, т. е. учтена корреляция результатов измерений амплитуды и деформации сигнала.

Дисперсии оценок τ и σ вычисляются в соответствии с (2):

$$D_\tau = \frac{1}{\det\Phi_4}\bar{L}_{22};\ D_\sigma = \frac{1}{\det\Phi_4}\bar{L}_{33},$$

где $\bar{L}_{ii}$ – дополнительный минор элемента Φ_{4ii} матрицы Φ_4.

Несмотря на различия в размерах матриц (5) и (15), а также на различный вид их компонент, справедливы равенства

$$\det\Phi_4 = -\det\Phi_3;\ \bar{L}_{22} = -\bar{M}_{22};\ \bar{L}_{33} = -\bar{M}_{33}.$$

Полученные результаты показывают, что дисперсия оценки информационных параметров не зависит от выбранного подхода к формированию ФП при наличии мешающих параметров.

Так как ОМП асимптотически эффективны, то полученные выражения (12), (13) можно трактовать как НГКР совместной оценки доплеровской задержки и деформации для сигнала со случайной начальной фазой и неизвестной амплитудой. Выражения для дисперсии оценок параметров сигнала со случайной фазой и известной амплитудой получены ранее в [7].

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы.

При использовании модели сигнала, не ограниченной разложениями по малым параметрам, необходимо переходить от оценки задержки и доплеровского сдвига частоты к совместным оценкам задержки и доплеровской деформации сигнала. Полученные в настоящей статье выражения для дисперсии оценок введенных параметров позволяют вычислить НГКР для сигнала произвольной формы.

Несмотря на то, что информационные матрицы измерений при оценке всех параметров сигнала и при усреднении функционала правдоподобия по начальной фазе с учетом формы ее распределения различны, дисперсии оценок информационных параметров оказываются одинаковыми. Таким образом, можно сделать вывод о том, что выбор способа построения оценки по максимуму правдоподобия не влияет на дисперсию оценки, а полученные выражения для дисперсии совместных оценок задержки и доплеровской деформации совпадают с НГКР.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ван-Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции: в 3 т. / пер. с англ., под ред. В. Т. Горяинова. М.: Сов. радио, 1977. Т. 3. 664 с.

2. Swick D. A. An Ambiguity Function Independent of Assumptions about Bandwidth and Carrier Frequency // NRL Report 6471, 1966. URL: http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/645918.pdf (дата обращения 11.12.2016).

3. Гоголев И. В., Яшин Г. Ю. Ограничения узкополосного разностно-временного и разностно-частотного методов и их модификация для широкополосного сигнала // Успехи современной радиоэлектроники. 2015. № 5. С. 75–78.

4. Weiss L. G. Wavelets and Wideband Correlation Processing // IEEE Signal Processing Magazine. 1994. P. 13–32.

5. Гришин Ю. П., Ипатов В. П., Казаринов Ю М. Радиотехнические системы / под ред. Ю. М. Казаринова. М.: Высш. шк., 1990. 496 с.

6. Трифонов А. П., Беспалова М. Б. Сверхширокополосная оценка дальности, скорости и ускорения // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2003. Т. 46, № 5/6. С. 3–11.

7. Гоголев И. В., Яшин Г. Ю. Граница Крамера–Рао совместной оценки доплеровской деформации и задержки сигнала со случайной начальной фазой // XXII Междунар. науч.-техн. конф. "Радиолокация, навигация, связь", Воронеж, 19–21 апр. 2016 г. / НПФ "САКВОЕЕ". Воронеж, 2016. Т. 1. С. 42–46.

8. Jin Q., Wong K. M., Luo Z. The Estimation of Time Delay and Doppler Stretch of Wideband Signals // IEEE Trans. on Signal Proc. 1995. Vol. SP-43. P. 904–916.

9. Wei H., Ye S., Wan Q. Influence of Phase on Cramer–Rao Lower Bounds for Joint Time Delay and Doppler Stretch Estimation // Proc. of 9th Intern. Symp. on Signal Processing and Its Applications (ISSPA-2007), Sharjah, 12–15 Feb. 2007. Piscataway: IEEE, 2007. P. 1–4.

I. V. Gogolev
JSC «SRI "Vector"» (Saint Petersburg)

Doppler stretch and delay Cramer–Rao lower bound for signal with large bandwidth

In this paper Cramer-Rao lower bound of joint Doppler stretch and delay estimation for wideband signal is derived. We use wideband term to denote cases in which narrowband signal model is inappropriate. Two alternative estimation methods are considered: first method implies estimation of all unknown parameters, both desired and nuisance; second involves the averaging of likelihood function by nuisance parameter with considering its probability density. Estimation variances are equal for specified methods.

Doppler stretch, Cramer–Rao Lower Bound, Fisher Information Matrix, Unknown Phase

Статья поступила в редакцию 2 сентября 2016 г.