УДК 681.51

Р. З. Ахметсафина
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

Об обратном модифицированном *z*-преобразовании при неизвестном значении параметра смещения

Рассмотрен алгоритм обратного модифицированного z-преобразования при значении запаздывания, не кратном интервалу дискретизации. Основу алгоритма составляет оценка параметра смещения решетчатой функции (дробной части запаздывания) как решение уравнения, реализующего дробно-рациональное представление передаточной функции непрерывной части.

Запаздывание, параметр смещения, обратное модифицированное *z*-преобразование

Поводом написания настоящей статьи послужили посты на форуме сообщества пользователей MathWorks® [1], [2] с обсуждением темы "как осуществить обратное *z*-преобразование передаточной функции" и "как преобразовать систему с запаздыванием из непрерывной в дискретную и затем из дискретной в непрерывную с сохранением результата?". Для преобразования модели из представления в дискретном времени в представление в непрерывном в MATLAB применяется функция **d2c** из расширения System Identification Toolbox [3] (для обратного преобразования применяется функция **c2d** из состава другого инструментального расширения – Control System Toolbox [4]).

Рассмотрим приведенный на форуме пример. Исходные данные:

```
>>H = tf(1,[1 1.8 .9])
>>Hz = c2d(H,ts,'zoh')
>>H_obratnoe_1 = d2c(Hz,'zoh')
```

Функция (рис. 1) демонстрирует, что задача решается корректно: после прямого и обратного дискретных *z*-преобразований с экстраполятором нулевого порядка (zero-order hold – zoh) восстанавливается исходная передаточная функция в *s*-области.

```
>>H = tf(1,[1 1.8 .9])
>>Hz = c2d(H,ts,'zoh')
>>H_obratnoe_1 = d2c(Hz,'zoh')

Transfer function:
         1
  -----------------
  s^2 + 1.8 s + 0.9

  Transfer function:
    0.09297 z + 0.06884
  ----------------------
  z^2 - 1.261 z + 0.4066

  Sampling time: 0.5

  Transfer function:
          1
  -----------------
  s^2 + 1.8 s + 0.9
```

Рис. 1

Протестируем эту последовательность преобразований, добавив в *s*-области запаздывание, кратное интервалу дискретизации, равному 0.5 ($\tau = 0$, рис. 2, *а*), и не кратное этому интервалу ($\tau = 0.7$, рис. 2, *б*):

```
>>H = tf(1,[1 1.8 .9],'InputDelay',tau)
>>Hz = c2d(H,ts,'zoh')
>>H_obratnoe_1 = d2c(Hz,'zoh').
```

Анализ рис. 2 показывает, что при запаздывании, кратном интервалу дискретизации, пара взаимно обратных преобразований выполняется корректно: восстанавливается исходная передаточная функция. Однако по некратной задержке после прямого и обратного преобразований получена модель, не совпадающая с исходной: функция в *s*-области представляет собой нерациональную дробь, а задержка отличается от введенной. Алгоритм функции **c2d** корректно реализует классическое в теории дискретных систем преобразование [5]–[8]. Проблема заключается в функции **d2c**: запаздывание модели в непрерывном времени рассчитывается только кратным интервалу дискретизации.

В составе расширения Control System Toolbox есть еще одна функция **d2d** [9], выполняющая пересчет дискретной модели для нового интервала дискретизации. Однако она также работает некорректно при не кратном интервалу дискретизации запаздывании линейной части модели.

```
Transfer function:
                    1
exp(-1*s) * -----------------
s^2 + 1.8 s + 0.9

Transfer function:
         0.09297 z + 0.06884
z^(-2) * ----------------------
         z^2 - 1.261 z + 0.4066

Sampling time: 0.5

Transfer function:
                   1
exp(-1*s) * -----------------
               s^2 + 1.8 s + 0.9
```

а

```
Transfer function:
                      1
exp(-0.7*s) * -----------------
s^2 + 1.8 s + 0.9

Transfer function:
         0.03764 z^2 + 0.115 z + 0.009173
z^(-2) * --------------------------------
              z^2 - 1.261 z + 0.4066

Sampling time: 0.5

Transfer function:
               0.03764 s^2 + 0.2965 s + 1
exp(-1*s) * -------------------------
                 s^2 + 1.8 s + 0.9
```

б

Рис. 2

Постановка задачи. Рассмотрим обратное модифицированное z-преобразование [10], [11] при неизвестном значении параметра смещения (моды) ε. Дискретная система (ДС) состоит из идеального импульсного элемента, включаемого с интервалом дискретизации T_0, экстраполятора нулевого порядка и непрерывной части (НЧ) с передаточной функцией (ПФ) $W^*(s)$ (рис. 3).

ПФ НЧ в s-области имеет вид

$$W^*(s)=\frac{B^*(s)}{A^*(s)}e^{-\tau s}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{p}b_i^* s^{p-i}}{s^n+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^* s^{n-i}}e^{-\tau s}=$$
$$=\frac{B^*(s)e^{-\tau s}}{s^{r_1-1}\prod\limits_{i=2}^{l}(s-s_i)^{r_i}}, \qquad (1)$$

где τ – запаздывание; p и n – натуральные числа $(p<n)$; b_i^*, a_i^* – вещественные коэффициенты; l – количество несовпадающих полюсов; $s_1=0$, s_2, …, s_l – не равные друг другу полюсы дроби (1); r_i – кратности полюсов $\left(\sum\limits_{i=1}^{l}r_i=n+1\right)$.

ПФ ДС в z-области связана с ПФ НЧ прямым z-преобразованием [6]:

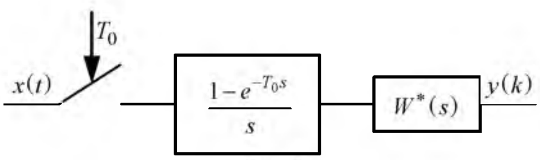

Рис. 3

$$W(z)=\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{1}{s}W^*(s)\right\}=\frac{B(z)}{A(z)}z^{-d}=$$
$$=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}b_i z^{n-i}}{z^n+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i z^{n-i}}z^{-d}=\frac{B(z)z^{-d}}{(z-1)^{r_1-1}\prod\limits_{i=2}^{l}(z-z_i)^{r_i}}, \qquad (2)$$

где $Z\{\cdot\}$ – оператор z-преобразования; b_i, a_i – вещественные коэффициенты; $d\ge 1$ – количество интервалов дискретизации (натуральное число); $z_1=1$, z_2, …, z_r – не равные друг другу полюсы дроби (2).

В ДС запаздывание НЧ представляется в виде целого числа d интервалов дискретизации T_0. Дробная часть запаздывания (не кратная интервалу дискретизации часть остатка запаздывания НЧ) в модели не выделяется и учитывается в числителе ПФ ДС при модифицированном z-преобразовании. Запаздывание представляется суммой целой d и дробной m частей:

$$\tau=(d+m-1)T_0=(d-\varepsilon)T_0,$$

где $m=1-\varepsilon$, $m\in[0,\,1)$, $\varepsilon\in(0,\,1]$.

Для рассматриваемой ДС при модифицированном z-преобразовании $Z_\varepsilon\{\cdot\}$:

$$H(z)=\frac{z}{z-1}\frac{B(z)}{A(z)}=Z_\varepsilon\left\{\frac{1}{s}\frac{B^*(s)}{A^*(s)}\right\}=Z_\varepsilon\{H^*(s)\},$$

а при обратном модифицированном z-преобразовании

$$H^*(s)=Z_\varepsilon^{-1}\{H(z)\}. \qquad (3)$$

В общем случае при известном параметре смещения обратное модифицированное z-преобразование (3) осуществляется после разложения на простые дроби (учитывая кратные и комплексно-сопряженные полюсы – корни знаменателя дроби (1)) [6]:

$$H(z)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{r_i-1}\frac{G_{ji}}{\left(z^{-1}-z_i^{-1}\right)^{j+1}};$$

$$H^*(s)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{r_i-1}\frac{D_{ji}}{\left(s-s_i\right)^{j+1}},$$

где G_{ji} и D_{ji} – коэффициенты разложения на простые дроби. Полюсы дробей связаны соотношениями $s_i=\ln(z_i)/T_0$.

Если при преобразовании из дискретной модели в непрерывную известна только ПФ ДС, а параметр смещения ε неизвестен, формально решением является ПФ НЧ, определенная обратным модифицированным z-преобразованием при любом значении параметра $\varepsilon\in(0,\ 1]$, что порождает неопределенность. При использовании функции **d2c** эту неопределенность решают наиболее простым способом, принимая $\varepsilon\equiv 0$. Таким образом запаздывание определяется с точностью целого интервала дискретизации, а требование получения рациональной дроби в записи ПФ НЧ выполняется, если ПФ ДС также записывается в виде рациональной дроби. В результате при выполнении условия кратности задержки интервалу дискретизации прямое и обратное преобразования дают правильный результат (рис. 2, *а*), а при некратности – порождают ошибку (рис. 2, *б*).

Обратное модифицированное *z*-преобразование. Рассмотрим методику, позволяющую ликвидировать ограничение кратности задержки интервалу дискретизации.

Оценка неизвестного параметра смещения. В [12] предложено определить дополнительное уравнение для параметра смещения ε из свойства записи ПФ НЧ дробно-рациональной функцией (1): порядок полинома числителя дроби меньше порядка полинома знаменателя. Через обратное преобразование Лапласа можно записать

$$L^{-1}\left\{H^*(s)\right\}\Big|_{t=0}=h^*(+0)=0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) формально описывает свойство реализуемой ПФ НЧ, записанной в дробно-рациональной форме: переходный процесс $h^*(t)$ без учета запаздывания должен начинаться с нуля.

Разложим $H(z)$ в степенной ряд:

$$H(z)=\sum_{k=0}^{\infty}h_k z^{-k},$$

где коэффициенты h_k определяются как

$$h_k=\frac{d^kH(z)}{d\left(z^{-1}\right)^k}\Bigg|_{z^{-1}=0}=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{r_i-1}(-1)^{j+1}G_{ji}C_{k+j}^{k}z_i^{k+j+1}.$$

Введем обозначение:

$$C_{k+j}^{k}=\binom{k+j}{k}=\frac{1}{j!}\sum_{q=0}^{j}(-1)^{q+j}S(j+1,\ q+1)k^q,$$

где $S(i,\ j)$ – числа Стирлинга первого рода [13]. Перегруппируем слагаемые, не зависящие от индекса k, используя эти числа:

$$h_k=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{r_i-1}\left[(-1)^{j+1}\sum_{q=j}^{r_i-1}G_{qi}\frac{S(q+1,j+1)}{q!}z_i^{q+1}\right]k^j z_i^k=$$
$$=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{r_i-1}G_{ji}^*k^jz_i^k,$$

где G_{ji}^* – вспомогательные коэффициенты.

Поскольку $h_k=h^*\left[(k+\varepsilon)T_0\right]$, для (4) формально можно записать $h^*(0)=h_{-\varepsilon}$, откуда

$$F(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{r_i-1}G_{ji}^*(-\varepsilon)^j z_i^{-\varepsilon}=0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) связывает известные параметры ПФ ДС G_{ji} с неизвестным значением параметра смещения ε через G_{ji}^*. Уравнение решается численными методами (например, методом Ньютона) в интервале $\varepsilon\in(0,\ 1]$.

Пересчет параметров модели. Коэффициенты h_k связаны с $H^*(s)$ следующим образом:

$$h_k=L^{-1}\left\{H^*(s)\right\}\Big|_{t=(k+\varepsilon)T_0}=h^*\left[(k+\varepsilon)T\right]_0=$$
$$=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{r_i-1}D_{ji}\frac{\left[(k+\varepsilon)T_0\right]^j}{j!}z_i^{k+\varepsilon}.$$

Это позволяет при известном параметре смещения ε сформировать систему уравнений для определения коэффициентов разложения на простые дроби ПФ НЧ D_{ji}, исходя из известных коэффициентов разложения на простые дроби ПФ ДС G_{ji} через вспомогательные коэффициенты G_{ji}^*:

$$z_i^{\varepsilon}\sum_{q=j}^{r_i-1}D_{qi}\frac{C_q^j}{q!}T_0^q\varepsilon^{q-j}=G_{ji}^*,\ \ i=\overline{1,\ l};\ \ \overline{j=0,r_i-1},$$

где $G_{ji}^{*} = (-1)^{j+1} \sum_{q=j}^{r_i-1} G_{qi} \frac{S(q+1, j+1)}{q!} z_i^{q+1}$.

Так, для инерционного звена первого порядка при не кратном T_0 запаздывании τ имеем:

$$W^{*}(s) = \frac{b_0^{*}}{s + a_1^{*}} e^{-\overbrace{(d-\varepsilon)T_0}^{\tau} s} \Leftrightarrow W(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z + a_1} z^{-d}.$$

В этом случае можно получить явную зависимость параметра смещения от коэффициентов числителя и знаменателя ПФ ДС:

$$\varepsilon = \frac{\ln\left(\dfrac{b_0 + b_1}{b_1 - a_1 b_0}\right)}{\ln(-a_1)}.$$

При представлении порядка числителя дроби (1) в виде $p = n - 1 - v$, где $0 < v < n$ – натуральное число, справедливо условие

$$\left.\frac{d^{v} h^{*}(t)}{dt^{v}}\right|_{t=0} = h^{*(v)}(+0) = 0$$

(верхний индекс в круглых скобках обозначает порядок производной), а для оценки неизвестного параметра смещения вместо уравнения (5) следует использовать уравнение $F^{(v)}(\varepsilon) = 0$. Такая замена обусловлена тем, что функция (5) при кратных полюсах может не пересекать ось ε. Производная v-го порядка гарантирует наличие корня уравнения.

На рис. 4 представлена упрощенная (без выделения кратных полюсов) MATLAB-функция, реализующая разработанное модифицированное обратное z-преобразование.

Протестируем функцию на исходном примере:

```
>>H = tf(1,[1 1.8 .9],'InputDelay',tau)
>>Hz = c2d(H,ts,'zoh')
>>H_obratnoe_2 = d2c_with_zoh(Hz)
```

Результат тестирования, представленный на рис. 5, показывает, что поставленная задача успешно решена: пара обратных преобразований приводит к исходной функции вне зависимости от значения смещения.

```
function sysc = d2c_with_zoh(sysd)
% d2c_with_zoh Conversion of discrete LTI models to
% continuous time (ZOH and unknown delay parameter)
% R.Z. Akhmetsafina, 2016, rakhmetsafina@hse.ru
 eps1 = eps*1e10;
 BZ = sysd.num{1}; AZ = sysd.den{1};
 d = sysd.InputDelay; % Запаздывание в Z-области
 if BZ(1) ~= 0, d = d + 1; end
 AZ = fliplr(AZ); BZ = fliplr(BZ);
 AS = conv(-AZ,[1 -1]);
 [g z K] = residue(BZ,AS); Ts = sysd.Ts;
 s = -log(z)/Ts; st = s.*Ts; stl1 = g;
 deriv = 0; z_1 = z.^(-1-eps1);
% Оценка разности порядков полинома
% знаменателя и числителя в S-области
 while real(sum(stl1)*(stl1.'*z_1)) > 0
     deriv = deriv + 1; stl=stl1; stl1=stl.*st;
 end
 m0 = 0.5; MaxIter = 50; Iter = 0; Done = 0;
 stl = stl1; stl1 = stl.*st;
% Оценка параметра смещения m
% (метод Ньютона)
 while (~Done) && (Iter<MaxIter)
     m = m0-(stl.'*(z.^(-m0)))/(stl1.'*(z.^(-m0)));
     Done = abs(m - m0) <= eps1;
     m0 = m; Iter = Iter + 1;
end
 m = real(m); c = -g.*z.^(-m);
 [BS AS] = residue(c, s, K);
 tau = (d+m-1)*Ts; % Запаздывание в S-области
 AS = real(AS(1:end-1));
 BS = real(BS(2+deriv:end));
 sysc = sysd; sysc.Ts = 0;
 sysc.Variable= 's';
 sysc.InputDelay = tau; sysc.ioDelay = 0;
 sysc.num{1} = BS; sysc.den{1} = AS;
end
```

Рис. 4

```
Transfer function:
                      1
exp(-1*s) * -----------------
            s^2 + 1.8 s + 0.9

Transfer function:
          0.09297 z + 0.06884
z^(-2) * ----------------------
         z^2 - 1.261 z + 0.4066

Sampling time: 0.5

Transfer function:
                      1
exp(-1*s) * -----------------
            s^2 + 1.8 s + 0.9
```

а

```
Transfer function:
                        1
exp(-0.7*s) * -----------------
              s^2 + 1.8 s + 0.9

Transfer function:
          0.03764 z^2 + 0.115 z + 0.009173
z^(-2) * --------------------------------
              z^2 - 1.261 z + 0.4066

Sampling time: 0.5

Transfer function:
                        1
exp(-0.7*s) * -----------------
              s^2 + 1.8 s + 0.9
```

б

Рис. 5

По результатам проведенного исследования можно сделать следующий вывод. При обратном модифицированном z-преобразовании, когда задана только ПФ ДС в z-области, в качестве неизвестного параметра смещения $\varepsilon \in (0,\ 1]$ предлагается принять значение, обеспечивающее условие дробно-рациональности результирующей дроби ПФ НЧ в s-области [12]. Исходя из такого условия, может быть получено дополнительное уравнение для оценки неизвестного параметра смещения ε z-преобразования. В настоящей статье предложен и реализован алгоритм, позволяющий осуществлять обратное модифицированное z-преобразование при не кратном интервалу дискретизации значении запаздывания для ДС, соответствующих структуре, представленной на рис. 3, и ПФ НЧ вида (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Z*-преобразование. URL: http://matlab.exponenta.ru/forum/post13182.html (дата обращения 21.07.2016).
2. How can I convert a system with delay from continuous to discrete and from discrete to continuous and the result be the same? URL: https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/9203-how-can-i-convert-a-system-with-delay-from-continuous-to-discrete-and-from-discrete-to-continuous-an (дата обращения 21.07.2016).
3. d2c. URL: http://www.mathworks.com/help/ident/ref/d2c.html (дата обращения 21.07.2016).
4. c2d. URL: http://www.mathworks.com/help/control/ref/c2d.html (дата обращения 21.07.2016).
5. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и *z*-преобразования. М.: Книга по требованию, 2012. 288 с.
6. Литвинов А. П. О машинном вычислении передаточных функций дискретных систем управления // Изв. вузов. Приборостроение. 1973. Т. 16, № 12. С. 31–34.
7. Попов Н. Р., Попов И. И. О формулах дискретного преобразования Лапласа, Фурье, *z*-преобразования и их применение // Радиотехника. 2000. Вып. 116. С. 28–34.
8. Kollár I., Franklin G. F., Pintelon R. On the Equivalence of *z*-domain and *s*-domain Models in System Identification // Proc. of the IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conf., Brussels, Belgium, June, 1996. Piscataway: IEEE, 1996. Vol. 1. P. 14–19.
9. d2d. URL: http://www.mathworks.com/help/control/ref/d2d.html (дата обращения 21.07.2016).
10. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования / пер. с англ. М.: Физматгиз, 1963. 455 с.
11. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М.: Физматгиз, 1963. 968 с.
12. Ахметсафин Р. Д., Ахметсафина Р. З. Обратное *z*-преобразование при идентификации дискретных систем с запаздыванием // Изв. вузов. Приборостроение. 2014. Т. 57, № 5. С. 15–25.
13. Липский В. Комбинаторика для программистов / пер. с польск. М.: Мир, 1988. 213 с.

R. Z. Akhmetsafina
National Research University "Higher School of Economics"

Inverse Modified Z-Transform with Unknown Delay Parameter

An algorithm for inverse modified z-transform with delay is considered. The delay parameter is a fraction of the sampling period. The fractional part of the delay is computed as the solution of the equation representing the rational transfer function of continuous part

Time delay, delay parameter, inverse modified Z-transform

Статья поступила в редакцию 19 мая 2016 г.