



УДК 621.3.013.71

М. Ю. Антипов, Г. Н. Цицикян
ЦНИИ СЭТ, филиал ФГУП "Крыловский государственный
научный центр" (Санкт-Петербург)

Индуктивность прямоугольных контуров

Рассмотрено взаимное влияние двух прямоугольных контуров при их различных конфигурациях. Получены формулы для расчета взаимоиндукции и на их основе построены зависимости коэффициента взаимной индукции от расстояния между различными по форме контурами. Установлена связь коэффициентов взаимной индукции для различных вариантов контуров.

Взаимная индуктивность, электродинамические силы

В радиотехнике и электронике применяются резонансные контуры с прямоугольными катушками индуктивности. Затруднение при проектировании устройств вызывает отсутствие в ряде случаев выражений для расчета индуктивных параметров прямоугольных контуров, в частности, расположенных в одной плоскости. В связи с этим ключевую роль приобретают расчетные выражения для определения индуктивностей прямолинейных параллельных проводников, имеющиеся, например, в [1]–[5].

Выражение для взаимной индукции двух параллельных прямолинейных проводников (рис. 1) имеет вид [5]

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[l_1 \ln \frac{l'_2 + l_2 - l_1 + a_1}{l'_2 - l_1 + a'_1} + l_2 \ln \frac{l'_2 + l_2 + a'_2}{l'_2 + l_2 - l_1 + a_1} + l'_2 \ln \frac{(l'_2 + l_2 + a'_2)(l'_2 - l_1 + a'_1)}{(l'_2 + l_2 - l_1 + a_1)(l'_2 + a_2)} + a_1 + a_2 - a'_1 - a'_2 \right], \quad (1)$$

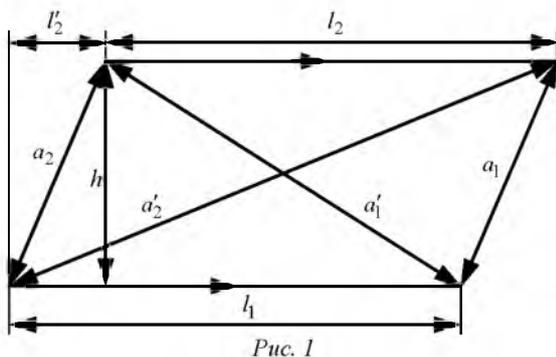


Рис. 1

где μ_0 – магнитная постоянная;

$$a_1 = \sqrt{(l_2 + l'_2 - l_1)^2 + h^2}; \quad a_2 = \sqrt{(l'_2)^2 + h^2}; \\ a'_1 = \sqrt{(l_1 - l'_2)^2 + h^2}; \quad a'_2 = \sqrt{(l'_2 + l_2)^2 + h^2}.$$

Выражение (1) можно привести к выражениям из [3], [4], если использовать обозначения:

$$a_1 = D; \quad a_2 = C; \quad a'_1 = B; \quad a'_2 = A; \quad l'_2 = c; \\ l_1 = c - b; \quad l_2 = d - b; \quad l'_2 + l_2 = c + d - b = a,$$

Тогда (1) принимает вид

$$M = \mu_0 / (4\pi) \times \left\{ \ln \frac{(a+A)^a (b+B)^b}{(d+D)^d (c+C)^c} + (C+D) - (A+B) \right\}. \quad (2)$$

Следует отметить, что выражение (2), хотя выглядит компактнее (1), не дает существенных преимуществ при определении взаимных индуктивностей прямоугольных контуров.

Рассмотрим систему двух расположенных вдоль одной линии проводников l_1 и l_2 при расстоянии d между ними (рис. 2). В этом случае (1) можно представить в следующем виде:

$$M|_{h=0} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[l_1 \ln \frac{l_1 + l_2 + d}{l_1 + d} + l_2 \ln \frac{l_1 + l_2 + d}{l_2 + d} + d \ln \frac{(l_1 + l_2 + d)d}{(l_2 + d)(l_1 + d)} \right], \quad (3)$$

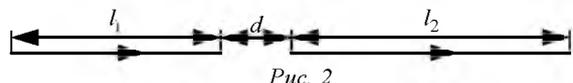


Рис. 2

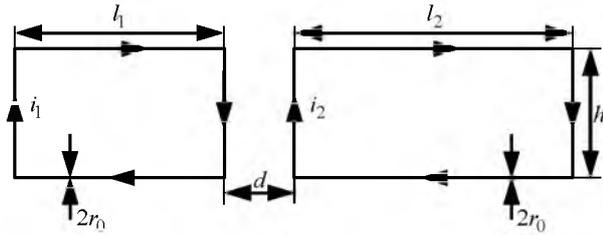


Рис. 3

Результат (3) при дополнительном условии $l_1 = l_2 = l$ приводится к виду, известному из [6]:

$$M(l_1 = l_2 = l, d, h = 0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[2l \ln \frac{2l+d}{l+d} + d \ln \frac{d(2l+d)}{(l+d)^2} \right], \quad (4)$$

что может служить доказательством справедливости формулы (1). Однако, с другой стороны, он лишь частично совпадает с формулой из широкоизвестного источника [7]. Выявившееся противоречие потребовало подробного рассмотрения задачи о взаимной индукции двух прямоугольных контуров (рис. 3).

Для определения взаимной индуктивности между контурами определим отдельно вклады, даваемые горизонтальными и вертикальными проводниками контуров. Для вклада горизонтальных проводников имеем:

$$\begin{aligned} M_{\Gamma} &= M|_{h=0} + M|_{h \neq 0} = \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ l_1 \ln \frac{l_1 + l_2 + d}{l_1 + d} + \right. \\ &+ l_2 \ln \frac{l_1 + l_2 + d}{l_2 + d} + d \ln \frac{d(l_1 + l_2 + d)}{(l_1 + d)(l_2 + d)} - \\ &- l_1 \ln \frac{l_2 + d + \sqrt{(l_2 + d)^2 + h^2}}{d + \sqrt{d^2 + h^2}} - \\ &- l_2 \ln \frac{l_1 + l_2 + d + \sqrt{(l_1 + l_2 + d)^2 + h^2}}{l_2 + d + \sqrt{(l_2 + d)^2 + h^2}} - \\ &- (l_1 + d) \times \\ &\times \left(\ln \left\{ \left[l_1 + l_2 + d + \sqrt{(l_1 + l_2 + d)^2 + h^2} \right] \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(d + \sqrt{d^2 + h^2} \right) \right\} - \right. \\ &- \ln \left\{ \left[l_2 + d + \sqrt{(l_2 + d)^2 + h^2} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \left. - \left[l_1 + d + \sqrt{(l_1 + d)^2 + h^2} \right] \right\} - \right. \\ &- \sqrt{(l_2 + d)^2 + h^2} - \sqrt{(l_1 + d)^2 + h^2} + \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{d^2 + h^2} + \sqrt{(l_1 + l_2 + d)^2 + h^2} \right\}. \quad (5) \end{aligned}$$

Вклад во взаимную индуктивность вертикальных проводников длиной h , расположенных

на расстояниях d , $l_1 + d$, $l_2 + d$ и $l_1 + l_2 + d$, запишем в виде

$$\begin{aligned} M_{\text{В}} &= -\frac{\mu_0}{2\pi} \left[h \ln \frac{h + \sqrt{h^2 + d^2}}{d} - \sqrt{h^2 + d^2} + d - \right. \\ &- h \ln \frac{h + \sqrt{h^2 + (l_1 + d)^2}}{l_1 + d} + \sqrt{h^2 + (l_1 + d)^2} - \\ &- (l_1 + d) - h \ln \frac{h + \sqrt{h^2 + (l_2 + d)^2}}{l_2 + d} + \\ &+ \sqrt{h^2 + (l_2 + d)^2} - (l_2 + d) + \\ &+ h \ln \frac{h + \sqrt{h^2 + (l_1 + l_2 + d)^2}}{l_1 + l_2 + d} - \\ &\left. - \sqrt{h^2 + (l_1 + l_2 + d)^2} + (l_1 + l_2 + d) \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

После ряда преобразований в (6) взаимная индуктивность для контуров на рис. 3 определится суммированием выражений (5) и (6):

$$\begin{aligned} M &= M_{\Gamma} + M_{\text{В}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[l_1 \ln \frac{l_1 + l_2 + d}{l_1 + d} + \right. \\ &+ l_2 \ln \frac{l_1 + l_2 + d}{l_2 + d} + d \ln \frac{d(l_1 + l_2 + d)}{(l_1 + d)(l_2 + d)} - \\ &- l_1 \ln \frac{l_1 + l_2 + d + s_{12}}{l_1 + d + s_1} - l_2 \ln \frac{l_1 + l_2 + d + s_{12}}{l_2 + d + s_2} - \\ &- d \ln \frac{(l_1 + l_2 + d + s_{12})(d + s_0)}{(l_2 + d + s_2)(l_1 + d + s_1)} - \\ &- h \ln \frac{(h + s_0)(h + s_{12})(l_1 + d)(l_2 + d)}{(l_1 + l_2 + d)d(h + s_1)(h + s_2)} + \\ &\quad \left. + 2(s_0 + s_{12}) - 2(s_1 + s_2) \right], \quad (7) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} s_0 &= \sqrt{d^2 + h^2}; \quad s_1 = \sqrt{(l_1 + d)^2 + h^2}; \\ s_2 &= \sqrt{(l_2 + d)^2 + h^2}; \quad s_{12} = \sqrt{(l_1 + l_2 + d)^2 + h^2}. \end{aligned}$$

Корректность формулы (7) подтверждается сопоставлением расчета по ней и результата в [2] для двух контуров с размерами $l_1 = 0.3$ м, $l_2 = 0.2$ м, $d = 0.25$ м, $h = 0.1$ м, полученного на основе промежуточных приемов. Взаимная индуктивность в соответствии с [2] равна $6.35 \cdot 10^{-10}$ Гн, а по (7) $-6.366 \cdot 10^{-10}$ Гн, т. е. результаты расчетов практически совпадают.

Положив $l_1 = l_2 = l$, получим выражение для взаимной индуктивности одинаковых контуров:

$$M(l, d, h) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[2l \ln \frac{(2l+d)(l+d+s_l)}{(l+d)(2l+d+s_{2l})} + d \ln \frac{d(2l+d)(l+d+s_l)^2}{(l+d)^2(2l+d+s_{2l})(d+s_0)} + h \ln \frac{(h+s_l)^2(2l+d)d}{(l+d)^2(h+s_{2l})(h+s_0)} + 2(s_0+s_{2l}) - 4s_l \right], \quad (8)$$

где

$$s_{2l} = \sqrt{h^2 + (2l+d)^2}; \quad s_l = \sqrt{h^2 + (l+d)^2}; \\ s_0 = \sqrt{h^2 + d^2}.$$

Коэффициент магнитной связи между контурами определяется как

$$K = |M| / \sqrt{L_1 L_2}. \quad (9)$$

Для его определения наряду с (8) воспользуемся формулой для индуктивности прямоугольного контура (рамки) (рис. 4) со сторонами h и l_p и шириной (диаметром провода) $2r_0$ ($r_0 \ll h, l_p$):

$$L_p = \frac{\mu_0}{\pi} \left\{ l_p \ln \frac{2l_p h}{r_0(l_p + \sqrt{l_p^2 + h^2})} + h \ln \frac{2l_p h}{r_0(h + \sqrt{l_p^2 + h^2})} + 2 \left[r_0 + \sqrt{l_p^2 + h^2} - (l_p + h) \right] \right\}. \quad (10)$$

Вывод (10) приведен в [8].

Например, для системы из двух контуров одинаковых размеров при $h = 0.2$ м, $l_p = l_1 = l_2 = 0.2$ м, $r_0 = 1$ мм по (10) получим:

$$L_1 = L_2 = 4 \cdot 10^{-7} \left\{ 2 \cdot 0.2 \ln \frac{2 \cdot 0.2 \cdot 0.2}{0.001(0.2 + \sqrt{0.2^2 + 0.2^2})} + \right.$$

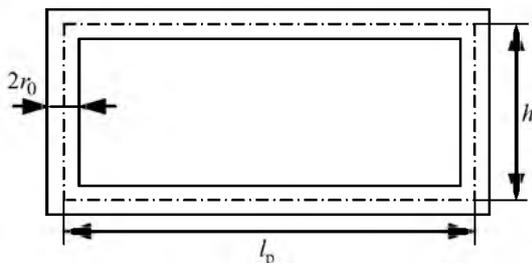


Рис. 4

$$+ 2 \left(0.001 + \sqrt{0.2^2 + 0.2^2} - 2 \cdot 0.2 \right) \Big\} = 7.247 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Тогда при $d = 0.1$ м коэффициент магнитной связи в соответствии с (9) составляет:

$$K|_{d=0.1} = \frac{8.795 \cdot 10^{-9}}{7.247 \cdot 10^{-7}} = 1.214 \cdot 10^{-2},$$

а при $d = 1$ м:

$$K|_{d=1} = \frac{9.456 \cdot 10^{-11}}{7.247 \cdot 10^{-7}} = 1.305 \cdot 10^{-4},$$

т. е. при увеличении расстояния между контурами на порядок коэффициент магнитной связи между ними уменьшился на 2 порядка.

Выражение для взаимной индукции двух контуров разных размеров (рис. 5) приводим без вывода:

$$M_2(l, d, h_{22} + h_{11}, h_{22} - h_{11}) = \mu_0 / (2\pi) \times \\ \times \left[2(l+d) \ln \frac{l+d+s_l^+}{2l+d+s_l^-} + (2l+d) \ln \frac{2l+d+s_{2l}^-}{2l+d+s_{2l}^+} + (h_{22} + h_{11}) \times \ln \frac{(h_{22} + h_{11} + s_l^+)^2 (2l+d)d}{(l+d)^2 (h_{22} + h_{11} + s_{2l}^+) (h_{22} + h_{11} + s_0^+)} - (h_{22} - h_{11}) \times \ln \frac{(l+d)^2 (h_{22} - h_{11} + s_{2l}^-) (h_{22} - h_{11} + s_0^-)}{(h_{22} - h_{11} + s_l^-)^2 (2l+d)d} + 2(s_0^+ - s_0^- + s_{2l}^+ - s_{2l}^-) + 4(s_l^- - s_l^+) \right], \quad (11)$$

где

$$s_0^+ = \sqrt{(h_{22} + h_{11})^2 + d^2}; \quad s_0^- = \sqrt{(h_{22} - h_{11})^2 + d^2}; \\ s_l^+ = \sqrt{(h_{22} + h_{11})^2 + (l+d)^2};$$

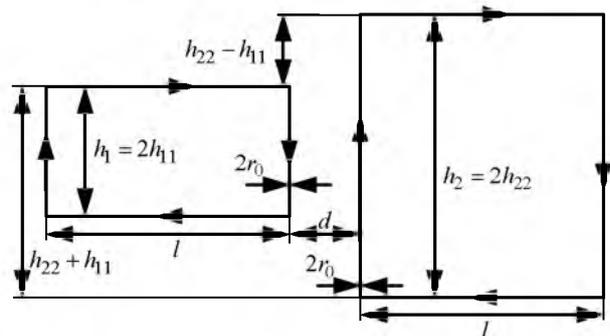


Рис. 5

$$s_l^- = \sqrt{(h_{22} - h_{11})^2 + (l + d)^2},$$

$$s_{2l}^+ = \sqrt{(h_{22} + h_{11})^2 + (2l + d)^2};$$

$$s_{2l}^- = \sqrt{(h_{22} - h_{11})^2 + (2l + d)^2}.$$

На рис. 6 приведены зависимости коэффициента взаимной индукции от расстояния между контурами d для линейных размеров, представленных в таблице.

Осуществив ряд преобразований, перепишем (11) в следующем виде:

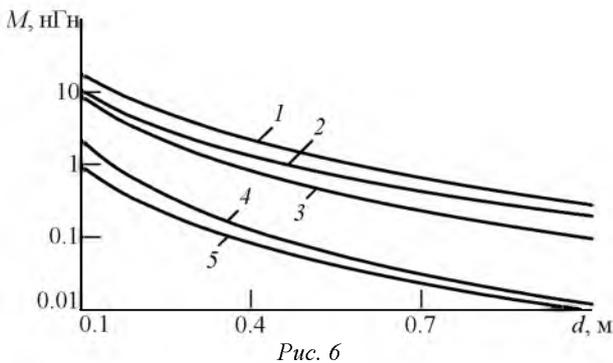
$$M_2(l, d, h_{22} + h_{11}, h_{22} - h_{11}) = \mu_0 / (2\pi) \times$$

$$\times \left\{ 2l \left[\ln \frac{l + d + s_l^+}{2l + d + s_{2l}^+} - \ln \frac{l + d + s_l^-}{2l + d + s_{2l}^-} \right] + \right.$$

$$+ d \left[\ln \frac{(l + d + s_l^+)^2}{(2l + d + s_{2l}^+)(d + s_0^+)} - \right.$$

$$\left. - \ln \frac{(l + d + s_l^-)^2}{(2l + d + s_{2l}^-)(d + s_0^-)} \right] +$$

$$+ (h_{22} + h_{11}) \times$$



Кривая	h_{11}	h_{22}	l_1	l_2
	м			
1	0.1	0.3	0.2	0.2
2	0.1	0.1	0.2	0.6
3	0.1	0.1	0.2	0.2
4	0.1	0.1	0.2	0.02
5	0.1	0.01	0.2	0.2

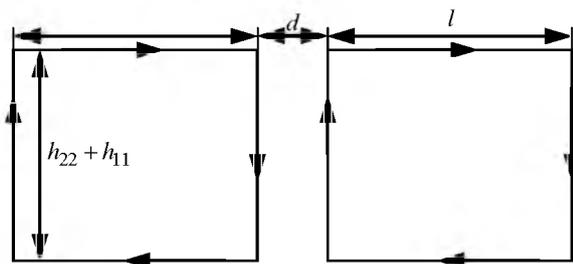


Рис. 7

$$\times \ln \frac{(h_{22} + h_{11} + s_l^+)^2 (2l + d) d}{(l + d)^2 (h_{22} + h_{11} + s_{2l}^+) (h_{22} + h_{11} + s_0^+) - (h_{22} - h_{11}) \times}$$

$$\times \ln \frac{(h_{22} - h_{11} + s_l^-)^2 (2l + d) d}{(l + d)^2 (h_{22} - h_{11} + s_{2l}^-) (h_{22} - h_{11} + s_0^-)} +$$

$$+ 2s_0^+ + 2s_{2l}^+ - 4s_l^+ - 2s_0^- - 2s_{2l}^- + 4s_l^- \}. \quad (12)$$

Прибавим и вычтем удвоенное значение коэффициента взаимной индукции (4). При этом (12) может быть представлено в виде

$$M_2(l, d, h_{22} + h_{11}, h_{22} - h_{11}) =$$

$$= M_1(l, d, h_{22} + h_{11}) - M_1(l, d, h_{22} - h_{11}). \quad (13)$$

Таким образом, (13) можно интерпретировать как суперпозицию двух пар контуров (рис. 7).

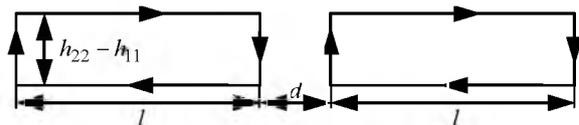
При $h_{22} - h_{11} = 0$

$$\ln \frac{l + d + s_l^-}{2l + d + s_{2l}^-} = 0; \quad s_l^- = 0$$

и (12) переходит в (8) с учетом того, что $h_{22} + h_{11} = h$.

К числу очевидных практических приложений полученных выражений следует отнести определение электродвижущих сил взаимной индукции в контурах по заданным изменениям токов во времени $e_2 = -M (di_1/dt)$ и $e_1 = -M (di_2/dt)$. Можно показать, что при повороте одного из контуров на 90° вокруг оси, расположенной в плоскости рис. 3 и 5, коэффициент магнитной индукции и связи между контурами будут равен нулю.

Другое практическое приложение полученных результатов относится к рассмотрению электродинамического взаимодействия контуров с током при различных нестационарных процессах в них. Определим силы, воздействующие на вертикальные отрезки проводников правой рамки с током i_2 со стороны вертикальных отрезков левой рам-



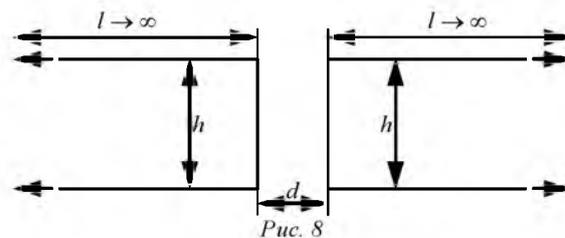
ки i_1 (рис. 3) [5]:

$$f'_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi d} i_1 i_2 \left[2\sqrt{d^2 + h^2} - 2d - 4\sqrt{(d+l)^2 + h^2} + 4(d+l) + 2\sqrt{(d+2l)^2 + h^2} - 2(d+2l) \right] = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \left[\frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{d} + \frac{\sqrt{(d+2l)^2 + h^2}}{d} - 2\frac{\sqrt{(d+l)^2 + h^2}}{d} \right], \quad (14)$$

К этой силе следует добавить силу взаимодействия горизонтальных проводников левой рамки с вертикальными проводниками правой рамки. На основании выражений для сил в [5] имеем:

$$f''_{21} = \left[\mu_0 / (2\pi) \right] i_1 i_2 \times \left\{ \ln \left[d(d+2l) \left(d+l + \sqrt{(d+l)^2 + h^2} \right)^2 \right] - \ln \left[(d+l)^2 \left(d + \sqrt{d^2 + h^2} \right) \times \left(d+2l + \sqrt{(d+2l)^2 + h^2} \right) \right] \right\}. \quad (15)$$

Объединив (14) и (15), получим окончательный результат для силы, действующей в горизонтальном направлении: $f_{21} = f'_{21} + f''_{21}$.



В предельном случае $h \ll l$ (рис. 8):

$$f_{21}|_{h \ll l} = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \left(\frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{d} - 1 - \ln \frac{d + \sqrt{d^2 + h^2}}{2d} \right).$$

Этот результат может быть проверен на основании (8) при $h \ll l$ в соответствии с определением силы: $f_d = i_1 i_2 (\partial M / \partial d)$.

При $d = h$ имеем:

$$f_{21}|_{d=h}^{l \rightarrow \infty} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \left[\sqrt{2} - 1 - \ln \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right] = 45.2 i_1 i_2 \text{ нН.}$$

В настоящей статье получены формулы для коэффициентов само- и взаимоиндукции прямоугольных контуров, расположенных в одной плоскости в конфигурациях рис. 2, 5, которые могут быть рекомендованы для практического использования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grover F. W. Inductance Calculations. Working Formules and Table / D. Van Nostrand Co. inc. New York, 1947. 98 p.
2. Калантаров П. А., Цейтлин Л. А. Расчет индуктивностей: справ. кн. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1986. 198 с.
3. Ramo S., Whinnery J. R., Van Duzer T. Field And Waves in Communication Electronics. New York: Wiley, 1965. 844 p.
4. Tesche F. M., Ianoz M., Karlsson T. EMC Analysis Methods and Computational Models. New York: Wiley, 1997. 623 p.
5. Цицикян Г. Н. Электродинамические силы в токоведущих частях электрических комплексов / ФГУП "Крыловский государственный научный центр". СПб., 2016. 93 с.
6. Lee Y. Antenna Circuit Design for RFID Applications. Microchip AN710 / Microchip Technol. Inc. Chandler, USA, 2003. P. DS00710C (1-50).
7. Мейнке Х., Гундлах Ф. В. Радиотехнический справочник: в 2 т. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1960. Т. 1. 417 с.
8. Paul C. R. Inductance: Loop and Partial. New-York: Wiley, 2011. 379 p.

M. Yu. Antipov, G. N. Tsitsikyan

FSUE "CSRI MET" (Branch of the FSUE "Krylov State Research Center") (Saint Petersburg)

The Inductance of the Rectangular Contours

The influence of two rectangular contours with their various configurations is considered. The formulas for calculation of mutual induction are received and based on them the dependences of the coefficient of mutual induction of the distance between the contours with various shapes are built. The connection of the coefficients of mutual induction for a variety contours is installed.

Partial Inductance, Electrodynamic Forces

Статья поступила в редакцию 7 октября 2016 г.