

УДК 621.396.988.1

В. К. Орлов, В. С. Рамаданов  
 Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
 университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина)

## Коррекции относительных координат по дальности по методу максимального правдоподобия

*Выведен алгоритм оценки максимального правдоподобия для измерений относительных координат и дальности, позволяющий наиболее эффективно использовать разнородные источники данных. Точность полученного алгоритма исследована двумя способами: аналитически и численным моделированием. Приведена область применимости аналитических выкладок, построен координатный фильтр, реализующий разработанную оценку.*

### Оценка максимального правдоподобия, информационная матрица Фишера, комплексирование навигационной информации, коррекция относительных координат

В задачах относительной навигации (ОН) требуется определять положение объектов друг относительно друга. Для получения данных о взаимном положении применяются два вида источников информации [1]. Первые выдают навигационные данные в абсолютных системах координат, связанных с Землей. К таким источникам относятся бортовые инерциальные навигационные системы (БИНС) и спутниковые радионавигационные системы (СРНС). Информацию о взаимном положении из абсолютных координат можно получить с помощью вычитания координат потребителей друг из друга. Другой тип источников дает информацию о взаимном положении. К ним относятся дальномеры, инфракрасные пеленгаторы, бортовые радиолокационные станции. Каждый из таких источников имеет свои достоинства и недостатки, определяющие его область применения.

В настоящей статье ограничимся рассмотрением вопросов оптимального комплексирования источников из первой группы с дальномерами. Критерием оптимальности будет являться минимум дисперсии оценки относительного положения при условии ее несмещенности. При отсутствии априорных данных об измеряемых величинах наилучшие результаты дают оценки максимального правдоподобия (МП) [2], поэтому рассмотрим именно этот класс оценок.

**Вывод правила оценивания.** Для наглядности и простоты интерпретации математических выкла-

док рассмотрим случай, когда координаты точки  $M$   $x_M$ ,  $y_M$  и дальность до нее  $D$  измеряются на плоскости (рис. 1). В результате измерений получено положение точки  $M_\alpha$ , характеризуемое измерениями координат  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  и дальности  $\alpha_D$ . После обработки результатов измерений формируется оценка положения точки  $\hat{M}$  с оценками координат  $\hat{x}_M$ ,  $\hat{y}_M$  и дальности  $\hat{D}$ . Как будет показано далее, этот случай легко можно распространить и на измерения в трехмерном пространстве.

Для синтеза алгоритма примем, что шумы измерений независимы, распределены нормально с нулевым математическим ожиданием (МО) и известными дисперсиями.

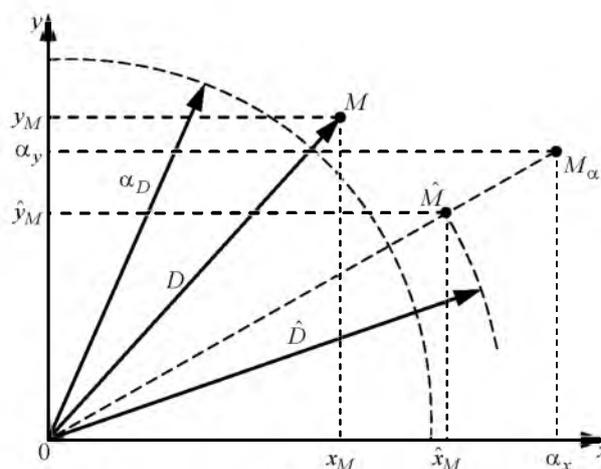


Рис. 1

Для математического описания оптимальной оценки необходимо задать вектор состояния системы:

$$\boldsymbol{\theta} = [x_M \ y_M \ D]^T, \quad (1)$$

где "Т" – символ транспонирования.

Так же можно получить расчетную дальность до точки, зная ее относительные координаты:

$$d = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}. \quad (2)$$

При этом  $D = d$ , что служит основанием построения совместной оценки.

Вектор наблюдения содержит результаты измерения элементов вектора состояния системы:

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_x \ \alpha_y \ \alpha_D]^T,$$

где  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_D$  – результаты измерения величин  $x_M$ ,  $y_M$  и  $D$  соответственно.

Правило МП основано на максимизации функции правдоподобия (ФП)  $\ln p_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}}$  по вектору состояния при фиксированном векторе наблюдения [2]:

$$\ln p_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \rightarrow \max.$$

За оценку МП принимается вектор состояния  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{x}_M \ \hat{y}_M \ \hat{D}]^T$ , при котором ФП достигает максимума.

Запишем условную плотность вероятности элементов вектора результатов измерений  $\boldsymbol{\alpha}$  при условии, что истинные значения измеряемых величин равны элементам вектора  $\boldsymbol{\theta}$ :

$$p_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 \det(K)}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\theta})^T K^{-1} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\theta}) \right\}, \quad (3)$$

где  $K$  – корреляционная матрица шумов измерений. Для рассматриваемого случая измерений на плоскости матрица  $K$  имеет вид

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_D^2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_D$  – среднеквадратические отклонения (СКО) измерений составляющих вектора  $\boldsymbol{\theta}$ .

При синтезе алгоритма оценки взаимной корреляцией между измерениями пренебрегаем.

Для получения правила оптимального оценивания необходима ФП для вектора  $\boldsymbol{\theta}$  при наличии вектора  $\boldsymbol{\alpha}$ , которая в рассматриваемом случае может быть получена подстановкой (4) в (3) и логарифмированием последнего выражения:

$$\ln p_{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}} = \ln \left[ \frac{1}{\sigma_x \sigma_y \sigma_D (\sqrt{2\pi})^3} \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{(\alpha_x - x_M)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(\alpha_y - y_M)^2}{\sigma_y^2} + \frac{(\alpha_D - D)^2}{\sigma_D^2} \right]. \quad (5)$$

Максимизацию полученной ФП необходимо проводить с учетом связи между элементами вектора состояния (2). Постоянное смещение не влияет на результат максимизации, поэтому первое слагаемое в (5) можно исключить из рассмотрения. Избавившись от множителя  $(-1/2)$ , сведем задачу отыскания МП-оценки к поиску условного минимума выражения:

$$\begin{cases} \frac{(\alpha_x - \hat{x}_M)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(\alpha_y - \hat{y}_M)^2}{\sigma_y^2} + \frac{(\alpha_D - \hat{D})^2}{\sigma_D^2} \rightarrow \min; \\ \hat{z}_x^2 + \hat{z}_y^2 = \hat{D}^2. \end{cases}$$

Задача условной минимизации ФП может быть решена различными методами. Наиболее привлекательным с точки зрения снижения сложности вычислений является метод неопределенных множителей Лагранжа [3]. Запишем граничное условие:

$$\varphi(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{x}_M^2 + \hat{y}_M^2 - \hat{D}^2 = 0 \quad (6)$$

и функцию Лагранжа:

$$\Phi(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \lambda) = \frac{(\alpha_x - \hat{x}_M)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(\alpha_y - \hat{y}_M)^2}{\sigma_y^2} + \frac{(\alpha_D - \hat{D})^2}{\sigma_D^2} + \lambda \varphi(\hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (7)$$

Оптимальная оценка по методу МП будет корнем системы уравнений:

$$\begin{cases} d[\Phi(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \lambda)]/d\hat{x}_M = 0; \\ d[\Phi(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \lambda)]/d\hat{y}_M = 0; \\ d[\Phi(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \lambda)]/d\hat{D} = 0; \\ \varphi(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Подставив в систему (8) функцию Лагранжа (7), получим:

$$\begin{cases} -(\alpha_x - \hat{x}_M)/\sigma_x^2 + \lambda \hat{x}_M = 0; \\ -(\alpha_y - \hat{y}_M)/\sigma_y^2 + \lambda \hat{y}_M = 0; \\ -(\alpha_D - \hat{D})/\sigma_D^2 - \lambda \hat{x}_M = 0; \\ \hat{x}_M^2 + \hat{y}_M^2 - \hat{D}^2 = 0, \end{cases}$$

откуда получим выражения для искомым элементов вектора оценок:

$$\begin{cases} \hat{x}_M = \alpha_x / (1 + \sigma_x^2 \lambda); \\ \hat{y}_M = \alpha_y / (1 + \sigma_y^2 \lambda); \\ \hat{D} = \alpha_D / (1 - \sigma_D^2 \lambda); \\ \hat{x}_M^2 + \hat{y}_M^2 - \hat{D}^2 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Параметр  $\lambda$  определим подстановкой верхних трех уравнений системы (9) в нижнее:

$$\frac{\alpha_x^2}{(1 + \sigma_x^2 \lambda)^2} + \frac{\alpha_y^2}{(1 + \sigma_y^2 \lambda)^2} - \frac{\alpha_D^2}{(1 - \sigma_D^2 \lambda)^2} = 0. \quad (10)$$

Полученное уравнение может быть сведено к обычному алгебраическому степенному уравнению (СУ), степень которого зависит от количества принятых различными СКО ошибок. При равных СКО измерений координат ( $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ ) степень СУ равняется 2, при различных СКО составляет 4.

Как следует из уравнения (10), оптимальная оценка вектора  $\theta$  нелинейна, поскольку параметр  $\lambda$  является нелинейной функцией от вектора измерений  $\mathbf{a}$ . Оценка  $n$ -го элемента вектора состояния может быть определена следующим образом:

$$\hat{\theta}_n = \frac{\alpha_n}{1 + \sigma_n^2 \lambda(\mathbf{a})} = \Theta_n(\mathbf{a}). \quad (11)$$

Рассмотрим подробно случай  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ . Уравнение (10) относительно параметра  $\lambda$  сводится к форме

$$(\alpha_x^2 + \alpha_y^2)(1 - \sigma_D^2 \lambda)^2 - \alpha_D^2 (1 + \sigma^2 \lambda)^2 = 0,$$

откуда

$$\pm \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2} (1 - \sigma_D^2 \lambda) = \pm \alpha_D (1 + \sigma^2 \lambda).$$

Решение этого СУ дает два различных корня:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2} + z_D}{\sigma_D^2 \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2} - \sigma^2 \alpha_D};$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2} - z_D}{\sigma_D^2 \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2} + \sigma^2 \alpha_D}.$$

Можно показать, что искомый максимум достигается при втором корне уравнения.

Подставив корень  $\lambda_2$  в систему уравнений (9), для координаты  $x$  получим выражение  $\Theta_1(\mathbf{a})$  (11):

$$\Theta_1(\mathbf{a}) = \frac{\alpha_x}{1 + \sigma^2 \lambda} = \frac{\alpha_x}{1 + \frac{\sigma^2 (\sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2} - \alpha_D)}{\sigma_D^2 \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2} + \sigma^2 \alpha_D}}.$$

После упрощения выражение примет вид

$$\Theta_1(\mathbf{a}) = z_x \left( \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_D^2} \frac{\alpha_D}{\sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}} + \frac{\sigma_D^2}{\sigma^2 + \sigma_D^2} \right). \quad (12)$$

**Аналитическое исследование оценки.** В (12) получена нелинейная МП-оценка величины  $x_M$ . Изучим ее свойства.

*Несмещенность оценки.* Способ отыскания МО случайной величины, полученной преобразованием другой случайной величины, описан в [3]. В рассматриваемом случае МО можно найти следующим образом:

$$M\{\hat{\theta}_n\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_n(\mathbf{a}) p_{\mathbf{a}|\theta} d\mathbf{z}. \quad (13)$$

Разложим функцию  $\Theta_n(\mathbf{a})$  (11) в ряд Тейлора [2] до второй производной включительно в окрестности истинного положения точки  $M$  в предположении несмещенности оценки:

$$\begin{aligned} \Theta_n(\mathbf{a}) &= \Theta_n(\mathbf{a})|_{\mathbf{a}=\theta} + \\ &+ \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Theta_n(\mathbf{a})|_{\mathbf{a}=\theta}}{\partial \alpha_i} (\alpha_i - \theta_i) + \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \Theta_n(\mathbf{a})|_{\mathbf{a}=\theta}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} (\alpha_i - \theta_i)(\alpha_j - \theta_j) + \\ &+ o_2(\mathbf{a}). \end{aligned} \quad (14)$$

Пренебрежем остаточным членом ряда  $o_2(\mathbf{a})$  ввиду его малости. Подставим (14) в (13) и проанализируем полученное выражение почленно.

При  $\mathbf{a} = \theta$   $\lambda(\theta) = 0$  и первый член оценки (14) с учетом (9) дает сам параметр:

$$\Theta_n(\mathbf{a} = \theta) = \theta_n.$$

Второй член подстановки (14) в (13) в той же точке дает:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Theta_n(\mathbf{a})}{\partial \alpha_i} \Big|_{\mathbf{a}=\boldsymbol{\theta}} (\alpha_i - \theta_i) p_{\mathbf{a}|\boldsymbol{\theta}} d\mathbf{z} = \frac{\partial \Theta_n(\mathbf{a})}{\partial \alpha_i} \Big|_{\mathbf{a}=\boldsymbol{\theta}} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_i - \theta_i) p_{\alpha_i|\theta_i} dz_i = 0. \quad (15)$$

Переход от тройного интеграла к одинарному осуществляется по условию нормировки функции  $p_{\mathbf{a}|\boldsymbol{\theta}}$ , а получившийся интеграл равен нулю как первый центральный момент случайной величины  $\alpha_i$ .

Член (13), содержащий вторые производные оценки, имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \Theta_n(\mathbf{a})}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \Big|_{\mathbf{a}=\boldsymbol{\theta}} (\alpha_i - \theta_i)(\alpha_j - \theta_j) p_{\mathbf{a}|\boldsymbol{\theta}} d\mathbf{a} = \frac{\partial^2 \Theta_n(\mathbf{a})}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \Big|_{\mathbf{a}=\boldsymbol{\theta}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_i - \theta_i)(\alpha_j - \theta_j) p_{\alpha_i, \alpha_j|\theta_i, \theta_j} d\alpha_i d\alpha_j. \quad (16)$$

Переход к двойному интегралу выполнен с помощью операции нормировки, аналогичной (15). Для  $i \neq j$  интеграл (16) равен нулю как корреляционный момент независимых величин. При  $i = j$  (16) дает дисперсию величины  $z_i$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \Theta_n(\mathbf{a})}{\partial \alpha_i^2} \Big|_{\mathbf{a}=\boldsymbol{\theta}} (\alpha_i - \theta_i)^2 p_{\mathbf{a}|\boldsymbol{\theta}} d\mathbf{a} = \frac{\partial^2 \Theta_n(\mathbf{a})}{\partial \alpha_i^2} \Big|_{\mathbf{a}=\boldsymbol{\theta}} \sigma_i^2.$$

В результате для компонент вектора измерений (1) получим:

$$M\{\hat{\theta}_n\} = \theta_n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial^2 \Theta_n(\mathbf{a})}{\partial \alpha_i^2} \Big|_{\mathbf{a}=\boldsymbol{\theta}} \sigma_i^2 \right]. \quad (17)$$

где  $M\{\cdot\}$  – символ математического ожидания.

Выражение для МО получим, подставив (12) в (17). Можно показать, что при достаточно существенно отличных от нуля элементах вектора  $\boldsymbol{\theta}$  ( $\theta_n \gg \sigma_n$ ) смещение МО оценки от их значений достаточно мало. Таким образом, оценку можно считать несмещенной. Для более сложной структуры  $\Theta_n(\mathbf{a})$  аналогичный результат можно показать, например, с помощью численного моделирования.

*Корреляционная матрица оценки.* Получим аналитические выражения для характеристик оценки, исходя из допущения о ее несмещенности. Область применения полученных выражений определим впоследствии с помощью численного моделирования. Для несмещенных многомерных МП-оценок корреляционная матрица может быть найдена как матрица, обратная информационной матрице Фишера  $\Phi$  [4]:

$$K_{МП} = \Phi^{-1}. \quad (18)$$

Элементы матрицы Фишера, в свою очередь, могут быть найдены как вторые производные логарифмической ФП по соответствующим элементам вектора состояния, взятые с обратным знаком и усредненные по реализациям вектора наблюдений:

$$\Phi_{ij} = - \frac{\partial^2 \ln p_{\mathbf{a}|\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta_i \partial \theta_j}.$$

Корреляционная матрица для скорректированных по (9) координат имеет вид:

$$K_{МП} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{x}}^2 & r_{xy} \sigma_{\hat{x}} \sigma_{\hat{y}} \\ r_{xy} \sigma_{\hat{x}} \sigma_{\hat{y}} & \sigma_{\hat{y}}^2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где  $\sigma_{\hat{x}}$ ,  $\sigma_{\hat{y}}$  – СКО оценок координат  $\hat{x}_M$ ,  $\hat{y}_M$  соответственно;  $r_{xy}$  – коэффициент корреляции оценок координат. Найдем все элементы информационной матрицы Фишера, дифференцируя логарифмическую ФП с учетом связи между элементами вектора наблюдения  $\mathbf{a}$  согласно (2). В этом случае для переменной  $x_M$  имеем:

$$\frac{dD}{dx_M} = \frac{d\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{dx_M} = \frac{2x_M}{2\sqrt{x_M^2 + y_M^2}} = \frac{x_M}{D}.$$

Для переменной  $y_M$  аналогично:

$$\frac{dD}{dy_M} = \frac{y_M}{D}.$$

Элементы матрицы Фишера имеют вид

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_{11} &= - \frac{\partial^2 \ln p_{\mathbf{a}|\boldsymbol{\theta}}}{\partial x_M^2} = \frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_D^2} \frac{x_M^2}{D^2}; \\ \Phi_{22} &= - \frac{\partial^2 \ln p_{\mathbf{a}|\boldsymbol{\theta}}}{\partial y_M^2} = \frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_D^2} \frac{y_M^2}{D^2}; \\ \Phi_{12} &= \Phi_{21} = - \frac{\partial^2 \ln p_{\mathbf{a}|\boldsymbol{\theta}}}{\partial x_M \partial y_M} = \frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_D^2} \frac{|x_M y_M|}{D^2}. \end{aligned} \right. \quad (20)$$

**Математическое моделирование алгоритма оценки.** Для оценки работоспособности разработанный алгоритм промоделирован в среде MATLAB [5]. Моделирование включало несколько этапов.

*Этап 1. Генерирование входных данных.* В качестве исходных данных были сгенерированы последовательности измерений  $\alpha_{xn}$ ,  $\alpha_{yn}$ ,  $\alpha_{Dn}$ :

$$\begin{aligned} z_{xn} &= x_M + \sigma_x \xi_n; \\ z_{yn} &= y_M + \sigma_y \eta_n; \\ z_{Dn} &= \sqrt{x_M^2 + y_M^2} + \sigma_D \zeta_n, \end{aligned}$$

где  $k = \overline{1, k_{\max}}$ ;  $\xi_n$ ,  $\eta_n$ ,  $\zeta_n$  – последовательности центрированных нормальных случайных величин с единичной дисперсией.

*Этап 2. Расчет МП-оценки.* Расчет оценки включает в себя численное решение уравнений системы (9) для набора данных, полученных на предыдущем этапе. В результате на выходе этапа имеем векторы оценок  $\{\hat{x}_k\}$ ,  $\{\hat{y}_k\}$ .

Работа алгоритма на плоскости при выборке из 15 оценок проиллюстрирована рис. 2. На рисунке треугольным маркером показано истинное положение цели (координаты  $x_M$ ,  $y_M$ ); штриховыми линиями нанесены результаты измерений дальности, ромбовидными маркерами даны оценки положения цели по результатам расчета  $\hat{x}_n$ ,  $\hat{y}_n$ ; круглыми – оценки, полученные комплексированием этих оценок с оценками дальности  $\hat{D}$ . Отраженные на рис. 2 результаты моделирования показывают, что комплексирование данных о местоположении с данными о дальности уменьшает разброс оценок координат и делает эти оценки зависимыми.

*Этап 3. Расчет точности оценок.* На этом этапе определяется корреляционная матрица (19). Матрица определялась двумя способами: с ис-

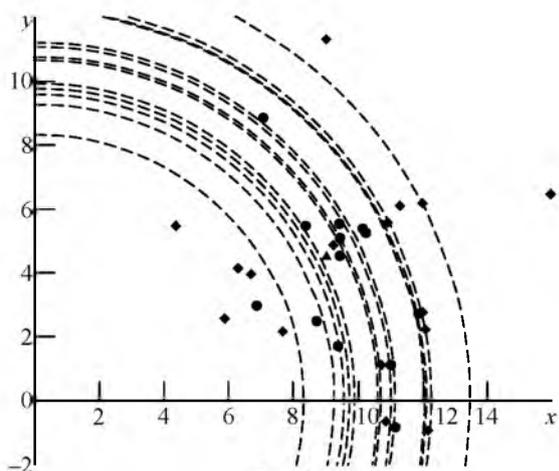


Рис. 2

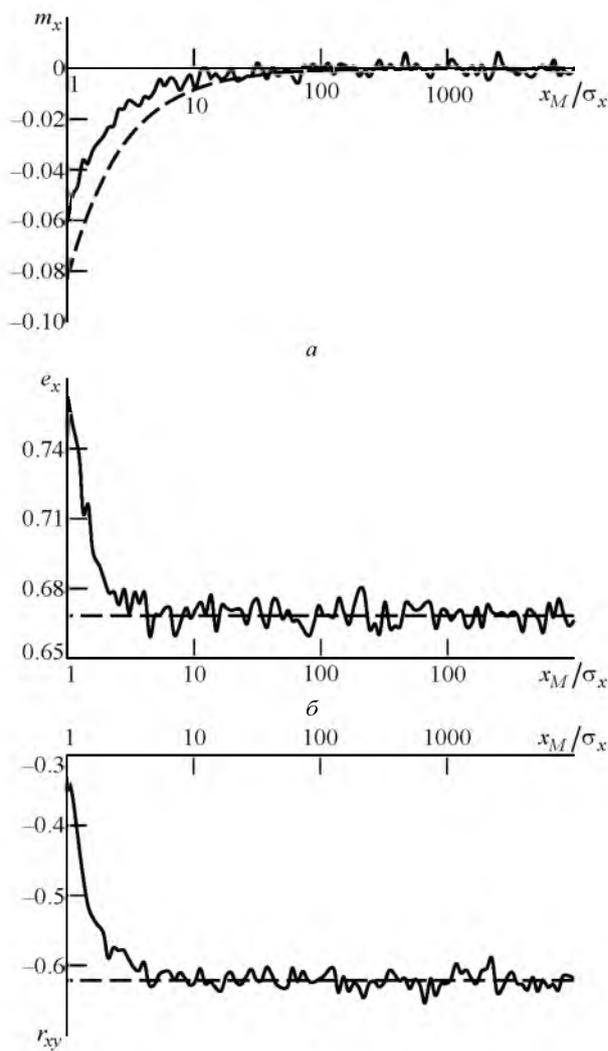


Рис. 3

пользованием функция MATLAB  $\text{cov}(x, y)$  [4] по результатам численного моделирования  $\{\hat{x}_n\}$ ,  $\{\hat{y}_n\}$  и обращением информационной матрицы Фишера, полученной согласно (18), (20).

Результаты моделирования для  $\sigma_x = \sigma_y = 3$ ,  $\sigma_D = 2$  представлены на рис. 3. Истинное положение цели  $M$  лежит в пределах  $x_M = (2 \dots 2 \cdot 10^4) \sigma_x$ ,  $y_M = (1 \dots 1 \cdot 10^4) \sigma_y$ , количество отсчетов измерений  $k_{\max} = 10^4$ .

На рис. 3 представлены зависимости характеристик оценки от нормированного значения координаты  $x_M/\sigma_x$ :  $a$  – нормированного смещения оценки  $m_x = (\hat{x} - x_M)/\sigma_x$ ;  $б$  – нормированного СКО  $e_x = \sqrt{(\hat{x} - x_M)^2}/\sigma_x$ ;  $в$  – коэффициента корреляции  $r_{xy}$ .

Как следует из рис. 3, результаты численного моделирования сходятся с результатами аналитических расчетов при отношении  $\theta_n/\sigma_n > 10 \dots 20$ . Расхождение результатов при меньших значениях  $\theta_n/\sigma_n$  объясняется смещением МО оценки, рассчитываемым по (12), (17), в этой области.

Обнаруженное в процессе исследования смещение оценки не влияет на практическую применимость последней по двум причинам. Во-первых, область  $\theta_n < 20\sigma_n$ , в которой наблюдается смещение, не представляет практического интереса, поскольку на практике объекты-носители системы ОН не сближаются на столь малые расстояния. В теоретическое рассмотрение эта область включена для демонстрации расходимости оценки. Во-вторых, из-за крайне малых значений смещение (рис. 3) не будет заметно на фоне случайных ошибок оценки.

**Оценка для трехмерного случая.** Для распространения полученных результатов на измерения в пространстве необходимо добавить в систему (9) уравнение относительно пространственной координаты z:

$$\hat{z}_M = \frac{\alpha_z}{1 + \sigma_z^2 \lambda},$$

а граничное условие (6) примет вид

$$\varphi(\theta) = \hat{z}_x^2 + \hat{z}_y^2 + \hat{z}_z^2 - \hat{D}^2 = 0.$$

Если ошибки измерений горизонтальных координат можно принять равными, то для измерений по высоте такое допущение неприемлемо как для данных как СРНС [6], так и БИНС [7]. При этом степень СУ после подстановки (7) и (12) в (13) становится равной 6, что налагает определенные ограничения на расчет параметра  $\lambda$ . На практике решение уравнения проводится численным способом, что на современном этапе развития алгоритмов решения СУ не составляет труда. При  $\sigma_x = \sigma_y$  уравнение имеет четвертую степень (максимальная для СУ, при которой существует общее решение), и параметр  $\lambda$  может быть вычислен с применением резольвенты по способу, представленному в [3].

Корреляционная матрица оценки (19) примет вид

$$K_{МП} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{x}}^2 & r_{xy}\sigma_{\hat{x}}\sigma_{\hat{y}} & r_{xz}\sigma_{\hat{x}}\sigma_{\hat{z}} \\ r_{xy}\sigma_{\hat{x}}\sigma_{\hat{y}} & \sigma_{\hat{y}}^2 & r_{yz}\sigma_{\hat{y}}\sigma_{\hat{z}} \\ r_{xz}\sigma_{\hat{x}}\sigma_{\hat{z}} & r_{yz}\sigma_{\hat{y}}\sigma_{\hat{z}} & \sigma_{\hat{z}}^2 \end{bmatrix}.$$

Информационная матрица Фишера должна быть дополнена следующими элементами:

$$\Phi_{13} = \Phi_{31} = -\frac{\partial^2 \ln p_{\alpha|\theta}}{\partial x_M \partial z_M} = \frac{1}{\sigma_D^2} \frac{|x_M z_M|}{D^2};$$

$$\Phi_{23} = \Phi_{32} = -\frac{\partial^2 \ln p_{\alpha|\theta}}{\partial y_M \partial z_M} = \frac{1}{\sigma_D^2} \frac{|y_M z_M|}{D^2};$$

$$\Phi_{33} = -\frac{\partial^2 \ln p_{\alpha|\theta}}{\partial z_M^2} = \frac{1}{\sigma_z^2} + \frac{1}{\sigma_D^2} \frac{z_M^2}{D^2}.$$

**Реализация алгоритма оценки.** Схема фильтра, корректирующего относительные координаты, полученные с помощью двух независимых СНС, установленных на борту носителей системы ОН, с помощью измерений дальности, изображена на рис. 4. Информация от СНС оппонента передается в фильтр через канал информационного обмена (ИО).

Дополнительно в фильтре можно проводить расчет числовых оценок (18), (20). Оценку на выходе фильтра можно считать несмещенной в области больших значений отношения  $\theta_n/\sigma_n$ . Также предложен способ расчета смещения оценки в области малых значений  $\theta_n/\sigma_n$  для простейшего двумерного случая по (12), (17). Для общего случая вывод аналитического выражения для МО оценки затруднен, так как требует функции  $\Theta_n(\alpha)$  в общем виде, для получения которой необходимо общее решение СУ высокой степени.

При необходимости работы в области смещенной оценки ее дисперсию можно вычислить [3] как

$$\sigma_n^2 = [1 + b'(\theta_n)]^2 \Phi_{nn}^{-1}, \quad (21)$$

где верхний штрих обозначает производную по аргументу. Смещение  $b(\theta_n)$  определяется из выражения:

$M\{\hat{\theta}_n\} = \theta_n + b(\theta_n)$  и может быть найдено из (17):

$$b(\theta_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial^2 \Theta_n(\alpha)}{\partial z_i^2} \Big|_{\alpha=\theta} \sigma_i^2 \right].$$

При малом значении  $\theta_n/\sigma_n$  в качестве элемента вектора  $\theta_n$  можно взять оценку  $\hat{\theta}_n$  и уточ-

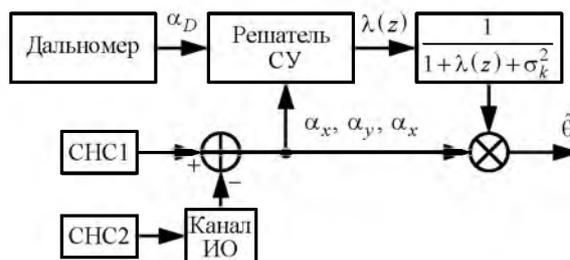


Рис. 4

нить ее дисперсию по выражению (21), при численном расчете производной  $b'(\theta_n)$  любым удобным способом.

В заключение отметим, что практическое применение разработанной оценки в виде системы уравнений (7) затруднено. Это обусловлено как типичными недостатками оптимальных оценок, так и спецификой их применения в системах ОН. К первым относятся необходимость точного знания характеристик шумов измерений (распределение и дисперсия) и соответствие реальных параметров принятым. Специфика проявляется во взаимной корреляции погрешностей измерения

координат в пространстве, возможных пропаданиях измерений и выбросах.

Ценность полученной оценки заключается в ее эффективности (достижении границы Крамера–Рао как МП-оценкой [3]). Синтезированная оценка может быть заложена в основу более сложных алгоритмов, учитывающих различные дестабилизирующие факторы, свойственные системам ОН, и устойчивых к ним. Для практического применения этой МП-оценки необходимы различные модификации алгоритма оценивания, разработка которых выходит за рамки настоящей статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Орлов В. К., Герчиков А. Г., Чернявский А. Г. Локальные радиотехнические системы межсамолетной навигации. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2011. 122 с.
2. Радиотехнические системы: учеб. для вузов по спец. "Радиотехника" / под ред. Ю. М. Казаринова. М.: Высш. шк., 1990. 496 с.
3. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 544 с.
4. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. 3-е изд. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.
5. Covariance – Matlab.cov. URL: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/cov.html> (дата обращения 24.12.2016).
6. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / под ред. А. И. Перова, В. Н. Харисова. 4-е изд. М.: Радиотехника, 2010. 800 с.
7. Матвеев В. В., Распопов В. Я. Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем / ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ "Электроприбор"». СПб., 2009. 280 с.

V. K. Orlov, V. S. Ramadanov  
Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI"

### Correction of the Relative Coordinates by Range using the Maximum Likelihood Method

*The maximum likelihood estimating algorithm for complex measurement of the relative coordinates and distance was created, the most efficient use of heterogeneous data sources is allowed. The accuracy of the algorithm is investigated in two ways: analytically and by numerical simulation. The applicability of the analyses is given, the coordinate filter, implemented the developed assessment, is constructed.*

Maximum Likelihood Estimation, Fisher Information Matrix, Navigation Data Complexing, Relative Coordinate Correction

Статья поступила в редакцию 14 ноября 2016 г.