

УДК 519.216.3

В. А. Головков

ОАО "Научно-исследовательский институт  
оптико-электронного приборостроения" (г. Сосновый Бор)

## Модели случайных процессов и особенности их использования при оптимальной линейной интерполяции и прогнозировании

*Рассмотрены модели корреляционных функций случайных процессов. Численными методами показано, что эффективность оптимальной линейной интерполяции и прогнозирования определяется существующей старшей производной случайного процесса. Приведены результаты численных расчетов эффективности интерполяции и прогнозирования дифференцируемых конечное число раз случайных процессов с используемыми на практике корреляционными функциями при фильтрации Винера–Хопфа.*

### Случайный процесс, дифференцируемость, фильтр Винера–Хопфа, прогнозирование, интерполяция

Нет необходимости говорить о важности разработки методов линейного оптимального прогнозирования и интерполяции случайных процессов, а также оценки эффективности этих операций, под которой следует понимать дисперсию результата прогнозирования или интерполяции случайного процесса [1], [2]. При использовании фильтра Винера–Хопфа [3], который формирует выходной сигнал  $\xi$  как линейную регрессию некоторой выборки  $\mathbf{Z} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k]$ :

$$\xi = \sum_{i=1}^k w_i \xi_i,$$

где  $w_1, w_2, \dots, w_k, i = \overline{1, k}$  – коэффициенты, образующие вектор  $\mathbf{W} = [w_1, w_2, \dots, w_k]$ . Оптимальный вектор коэффициентов определяется как

$$\mathbf{W}_{\text{opt}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}^T, \quad (1)$$

где  $\mathbf{R}$  – матрица взаимной корреляции элементов выборки  $\mathbf{Z}$ ;  $\mathbf{P}$  – вектор взаимной корреляции сигнала  $\xi$  и элементов выборки  $\mathbf{Z}$ ; "T" – символ транспонирования.

Минимальная дисперсия величины  $\xi$  определяется в следующем виде:

$$\sigma^2(\xi|\mathbf{Z}) = \sigma^2 - \mathbf{P} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}^T, \quad (2)$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия случайного процесса. В реальных ситуациях невозможно предположить finiteness спектральной плотности анализируемого случайного процесса, при этом размер выбор-

ки  $N_B$  для выполнения задач прогнозирования и интерполяции достаточно ограничен техническими возможностями оборудования. Выборка для прогнозирования случайного процесса формируется в определенный момент времени, при формировании выборки для интерполяции случайного процесса минимально необходимо два таких момента. Отсюда следует необходимость допускать наличие остаточной дисперсии результата прогнозирования или интерполяции случайного процесса. Знание многомерной плотности вероятности случайного процесса также часто невозможно, однако для реализации оптимального линейного прогнозирования или интерполяции случайных процессов достаточно знания их спектрально-корреляционных характеристик. Для упрощения описания случайный процесс  $\eta(t)$  и его реализацию будем обозначать одинаково как  $\xi(t)$  [4]. Предположив, что  $\xi(t)$  стационарен, с дисперсией  $\sigma^2$  и корреляционной функцией  $R(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau)$ , где  $\rho(\tau)$  – нормированная корреляционная функция (НКФ), рассмотрим различные спектрально-корреляционные характеристики случайных процессов (таблица).

В таблице приведены наиболее часто употребляемые на практике НКФ и спектральные плотности  $S(\omega)$  случайных процессов. Кроме того в ней приведены  $-\rho''(0)$  – второй спектральный момент случайного процесса [4];  $\Delta f_3$  – эффективная ширина спектральной плотности случайного процесса.

№	$\rho(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$	$-\rho''(0)$	$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$	$\Delta f_3$
1	$e^{-\alpha \tau }$	-	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$	$\frac{\alpha}{2}$
2	$(1 + \alpha \tau )e^{-\alpha \tau }$	$2\alpha$	$\frac{4\alpha^3}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{4}\alpha$
3	$\left[1 + \alpha \tau  + \frac{1}{3}(\alpha\tau)^2\right]e^{-\alpha \tau }$	$\frac{1}{3}\alpha^2$	$\frac{16\alpha^5}{3(\alpha^2 + \omega^2)^3}$	$\frac{3}{16}\alpha$
4	$\left[1 + \alpha \tau  + \frac{2}{5}(\alpha\tau)^2 + \frac{1}{15}(\alpha \tau )^3\right]e^{-\alpha \tau }$	$\frac{1}{5}\alpha^2$	$\frac{32\alpha^7}{5(\alpha^2 + \omega^2)^4}$	$\frac{5}{32}\alpha$
5	$\cos(\omega_0\tau)$	$\omega_0^2$	$[1/(2\pi)][\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	-
6	$e^{-\alpha\tau^2}$	$2\alpha$	$\sqrt{\pi/\alpha} \cdot e^{-[\omega^2/(4\alpha)]}$	$\sqrt{\alpha/\pi}$
7	$\frac{\sin(\Delta\omega\tau/2)}{(\Delta\omega\tau/2)}$	$\frac{1}{12}(\Delta\omega)^2$	$\begin{cases} 2\pi/\Delta\omega, &  \omega  \leq \Delta\omega/2; \\ 0, &  \omega  \geq \Delta\omega/2 \end{cases}$	$\frac{1}{2\pi}\Delta\omega$

Случайный процесс № 1 с НКФ  $\rho(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$  не дифференцируем, хотя и непрерывен. Чаще всего такую корреляционную функцию используют при описании простых марковских случайных процессов. Случайный процесс № 2 дифференцируем один раз, № 3 – дифференцируем дважды, № 4 – три раза [4].

В теоретических исследованиях часто возникают математические модели, соответствующие недифференцируемым случайным процессам. Это происходит, как правило, когда реализация случайного процесса образуется из большого числа малых независимых слагаемых, например токового импульса от движения отдельно взятого электрона. Хотя вклад этот ничтожен, однако именно эти слагаемые определяют "тонкую" структуру реализации процесса. Вследствие этого реализации процесса могут рассматриваться как непрерывные, однако ни в одной точке не являются дифференцируемыми [5].

Реализация процесса № 5 (см. таблицу) с НКФ  $\rho(\tau) = \cos(\omega_0\tau)$  описывается как

$$\xi(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где  $A$  – амплитуда;  $\omega_0$  – постоянная частота;  $\varphi$  – случайная величина с плотностью вероятности  $p(\varphi) = 1/(2\pi)$ ,  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ . Такой процесс дифференцируем сколь угодно много. Процесс № 6 дифференцируем сколько угодно много раз. Однако процесс № 6 с НКФ  $\rho(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}$  имеет равную нулю спектральную плотность только при  $\omega \rightarrow 0$ , в то время как процесс № 7 с НКФ

$\rho(\tau) = \sin(\Delta\omega\tau/2)/(\Delta\omega\tau/2)$  имеет финитную по оси  $\omega$  спектральную плотность. Можно заметить, что вопрос существования бесконечно дифференцируемых случайных процессов сомнителен, так как позволяет рассчитать реализацию таких процессов на бесконечное время вперед и назад, приводя к понятию линейной сингулярности [6] или вырожденности случайного процесса.

Рассмотрим случайный процесс № 5 с НКФ  $\rho(\tau) = \cos(\omega\tau)$ . Для расчета коэффициентов регрессии с целью прогнозирования реализации  $\xi(t + \theta)$  ( $\theta$  – интервал прогнозирования) возьмем выборку  $\mathbf{Y} = \xi(t), \xi'(t)$  и, используя [4], составим матрицу  $R$  и вектор  $\mathbf{P}$ :

$$R = \sigma^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\rho''(0) \end{vmatrix} = \sigma^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{vmatrix}; \quad (3)$$

$$\mathbf{P} = \sigma^2 [\cos(\omega\theta) \quad \omega \sin(\omega\theta)].$$

Обратив матрицу (3), получим коэффициенты регрессии:

$$w_1(\theta) = \cos(\omega\theta); \quad w_2(\theta) = \sin(\omega\theta)/\omega.$$

Таким образом, если для прогнозирования используется выборка  $\mathbf{Y} = \xi(t), \xi'(t)$ , а НКФ процесса имеет вид  $\rho(\tau) = \cos(\omega\tau)$ , алгоритм прогнозирования может быть записан в виде

$$\xi[(t + \theta)|t] = \cos(\omega\theta)[\xi(t) - \mu] + \frac{\sin(\omega\theta)}{\omega} \xi'(t).$$

Для конкретной реализации этот алгоритм однозначно позволяет рассчитать будущую реализацию случайного процесса для любого интервала

прогнозирования  $\theta$ . Так, например, для процесса № 5 с реализацией вида  $\xi(t) = A \sin(\omega t)$  при фазе  $\varphi = 0$  и математическом ожидании  $\mu = 0$  прогноз реализации имеет вид  $\xi(t + \theta) = A \sin[\omega(t + \theta)]$ . При использовании второй производной реализации этого случайного процесса матрица  $R$  станет вырожденной, определитель ее будет равен нулю и алгоритм прогнозирования получить невозможно.

Сложнее обстоит дело, если в качестве модели помехи выбрать случайный процесс, дифференцируемый конечное число раз. Как показывают численные исследования, максимальный размер выборки, обрабатываемый прогнозирующим фильтром, определяется существующей старшей производной случайного процесса. Так, если случайный процесс не дифференцируем, то вся информация о его прошлом и будущем определяется только его реализацией. Например, этим свойством обладает простой марковский процесс с НКФ  $\rho(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ . Если случайный процесс дифференцируем один раз, то максимальный размер выборки составляет 2 отсчета случайного процесса, если процесс дифференцируем дважды, то максимальный размер выборки равен трем и т. д. Дальнейшее увеличение размера выборки не приводит к уменьшению дисперсии прогноза.

В качестве примера рассмотрим трижды дифференцируемый случайный процесс с НКФ:

$$\rho(\tau) = \left[ 1 + \alpha|\tau| + \frac{2}{5}(\alpha\tau)^2 + \frac{1}{15}(\alpha|\tau|)^3 \right] e^{-\alpha|\tau|}. \quad (4)$$

Так как корреляционные функции случайных процессов, дифференцируемых конечное число раз, в явном виде не дифференцируются, целесообразно рассматривать выборку их значений

$$\mathbf{X} = [\xi(t), \xi(t - \Delta t), \dots, \xi(t - n\Delta t), \dots],$$

где  $\Delta t$  – временной интервал между элементами выборки;  $n$  – целое. Получить вектор оптимальных коэффициентов  $\mathbf{W}_{\text{opt}}$  (1), используя вектор выборки  $\mathbf{X}$  и значение прогноза  $\xi(t + \theta)$ , нетрудно. Построим графики зависимости нормированной дисперсии прогноза случайного процесса от интервала времени прогноза  $\theta$  в виде

$$\sigma_{\text{н}}^2(\theta) = \frac{\sigma^2 \{ \xi(t + \theta) | [ \xi(t), \xi(t - \Delta t), \dots, \xi(t - n\Delta t) ] \}}{\sigma^2},$$

где

$$\sigma^2 \{ \xi(t + \theta) | [ \xi(t), \xi(t - \Delta t), \dots, \xi(t - n\Delta t) ] \}$$

– дисперсия прогноза  $\xi(t)$  на момент времени  $t + \theta$  от момента времени  $t$ . Как показывают исследования [1], для снижения дисперсии прогноза следует уменьшать временной интервал  $\Delta t$ . Выберем параметр  $\alpha = 32/5$  для этой корреляционной функции, тогда эффективная ширина спектра случайного процесса  $\Delta f_{\text{э}} = 1$ . На рис. 1 приведена зависимость нормированной дисперсии прогноза  $\sigma_{\text{н}}^2(\theta)$  для случайного процесса с НКФ (4). Расчеты были проведены при  $\Delta t = 0.01$  для различных размеров выборки  $N_{\text{в}}$ . Как видно из рис. 1, эффективность прогнозирующего фильтра при использовании выборки с  $N_{\text{в}} > 4$  не возрастает.

Таким образом, случайные процессы, дифференцируемые конечное число раз, могут быть прогнозируемы трансверсальными фильтрами, причем порядок фильтра определяется порядком существующей старшей производной случайного процесса. Порядок выборки прогнозирующего фильтра для случайных процессов, дифференцируемых бесконечное число раз (процессы № 6 и 7 в таблице), ограничивается исходя из других соображений. Так при выборе НКФ типа гауссоиды  $\rho(\tau) = \exp(-\alpha\tau^2)$   $N_{\text{в}} \geq 3-4$ , а для НКФ вида  $\rho(\tau) = \sin(\alpha\tau)/(\alpha\tau)$   $N_{\text{в}}$  ограничивается шумом квантования при аналого-цифровом преобразовании [7].

Аналогичные соображения касаются вопросов интерполяции случайных процессов. Известно [8], что если при интерполяции случайных процессов использовать кроме значения процесса его производные, то интервал между отсчетами можно увеличить пропорционально порядку используемых производных. В практических инженерных задачах, как правило, представляет интерес интерполяция случайного процесса в пределах

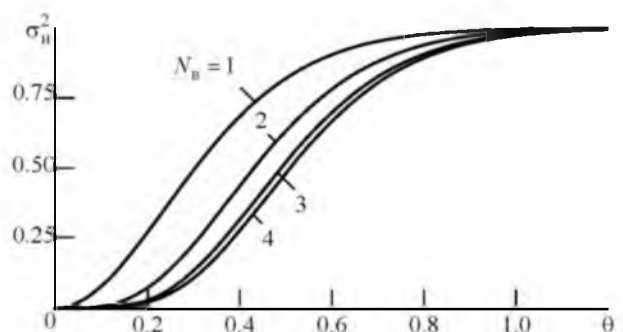


Рис. 1

некоторого интервала времени. Тогда на границах этого интервала целесообразно брать выборку значений случайного процесса и его производных или нескольких значений случайного процесса.

Для случайных процессов № 6 и 7 из таблицы этот вопрос исследован в [2]. Пусть интерполирование производится на момент времени  $t = t_0 + \theta$ , не превосходящий интервала интерполяции  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ . Рассмотрим выборку

$$\mathbf{X} = [\dots, \xi(t_0 - 2\Delta t), \xi(t_0 - \Delta t), \xi(t_0), \xi(t_0 + T), \xi(t_0 + T + \Delta t), \xi(t_0 + T + 2\Delta t), \dots]. \quad (5)$$

На основании этого вектора составить матрицу  $R$  и получить вектор  $\mathbf{P}$  как вектор взаимной корреляции  $\xi(t_0 + \theta)$  и элементов вектора  $\mathbf{X}$  нетрудно, поэтому в настоящей статье они не приводятся. Используя (1), находится вектор весовых коэффициентов  $\mathbf{W}_{opt}$ , а используя (2) – дисперсия интерполированных значений  $\sigma^2 [\xi(t_0 + \theta) | \mathbf{X}]$ . Нормированную эффективность интерполяции представим в виде

$$l(\theta) = \frac{\sigma^2 [\xi(t_0 + \theta) | \mathbf{X}]}{\sigma^2}$$

Рассмотрим случайный процесс № 1 из таблицы. Для обеспечения эффективной ширины его спектра  $\Delta f_s = 1$  установим для НКФ  $\alpha = 2$ . Также проанализируем трижды дифференцируемый случайный процесс с НКФ (4) и эффективной шириной спектра  $\Delta f_s = 1$ , как и при рассмотренной ранее оценке дисперсии прогноза. Проведем расчеты для трансверсального фильтра при  $\Delta t = 0.01$ . На рис. 2 приведены зависимости  $l(\theta)$  для этих случаев при интерполяции случайного процесса на интервале  $T = 1.2$ . На этом рисунке кривая  $l$  построена для процесса № 1 с НКФ  $\rho(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$  и выборкой (5), остальные кривые – для процесса с НКФ (4) при следующих выборках:

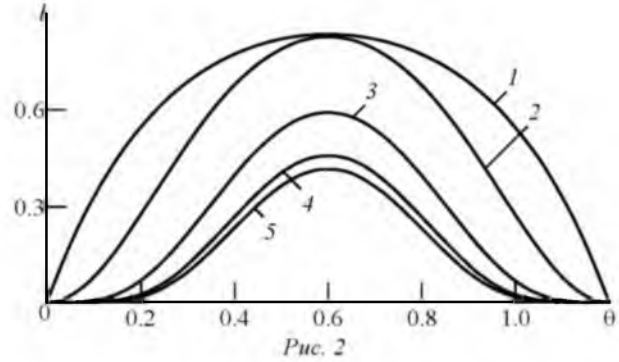
$$\mathbf{X} = [\xi(t_0), \xi(t_0 + T)]$$

– кривая 2;

$$\mathbf{X} = [\xi(t_0 - \Delta t), \xi(t_0), \xi(t_0 + T), \xi(t_0 + T + \Delta t)]$$

– кривая 3;

$$\mathbf{X} = [\xi(t_0 - 2\Delta t), \xi(t_0 - \Delta t), \xi(t_0), \xi(t_0 + T), \xi(t_0 + T + \Delta t), \xi(t_0 + T + 2\Delta t)]$$



– кривая 4;

$$\mathbf{X} = [\xi(t - 3\Delta t), \xi(t_0 - 2\Delta t), \xi(t_0 - \Delta t), \xi(t_0), \xi(t_0 + T), \xi(t_0 + T + \Delta t), \xi(t_0 + T + 2\Delta t), \xi(t_0 + T + 3\Delta t)]$$

– кривая 5.

Как следует из рис. 2, эффективность интерполяции для случайных процессов определяется существующей старшей производной случайного процесса. Исследования показывают, что если случайный процесс не дифференцируем, то для его интерполяции на краях интервала времени достаточно знать его значения на этих краях. Если случайный процесс дифференцируем один раз, то выборку на краях интервала интерполяции целесообразно брать уже в 2 значения, если случайный процесс дифференцируем 2 раза, то на краях интервала времени целесообразно брать выборку в 3 значения случайного процесса и т. д. Дальнейшее увеличение размера выборки не приводит к повышению эффективности интерполяции.

Таким образом, эффективность оптимального линейного прогнозирования и интерполяции случайных процессов с использованием фильтрации Винера–Хопфа определяется их старшей производной. Использование моделей тех или иных корреляционных функций определяется задачей, стоящей перед исследователем. Так для устранения "парадоксальных" эффектов в виде сингулярности случайных процессов при оптимальной линейной экстраполяции или интерполяции можно использовать случайные процессы, дифференцируемые конечное число раз. Линейная сингулярность дифференцируемых без ограничений случайных процессов может быть устранена добавлением шумов квантования при аналого-цифровом преобразовании либо добавлением "белого" шума к самому процессу.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головков В. А. Характеристики прогнозирующих фильтров // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2010. Вып. 2. С. 3–8.
2. Головков В. А. Интерполяция случайных процессов с использованием фильтрации Винера–Хопфа // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2009. Т. 52, № 3–4. С. 29–36.
3. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов / пер. с англ. М.: Радио и связь, 1989. 440 с.
4. Тихонов В. И., Хименко В. И. Выбросы траекторий случайного процесса. М.: Наука, 1987. 450 с.
5. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высш. шк., 2000. 462 с.
6. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. М.: Наука, 1990. 272 с.
7. Головков В. А., Бодренко Ж. Е. Выбор параметров фильтров предсказания случайных процессов // Радиотехника. 1997. № 4. С. 32–33.
8. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Фinitные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971. 408 с.

V. A. Golovkov

JSC "Science research Institute of opto-electronic instrumentation" (Sosnovy Bor t.)

### Models of Random Processes and Their Particular Application in the Optimum Linear Interpolation and Forecasting

*Models of correlation functions of random processes are considered. Numerical methods show that efficiency of the optimum linear interpolation and forecasting is defined by higher derivative of random processes. The results of numerical calculations of the interpolation and forecasting efficiency of random processes differentiated finitely many with some correlation function at Wiener filtration are given.*

Random process, differentiability, Wiener–Hopf filter, forecasting, interpolation

Статья поступила в редакцию 4 февраля 2016 г.

УДК 621.391; 519.254

Д. М. Клионский, А. М. Голубков, Д. И. Каплун, М. С. Куприянов  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина)

## Исследование алгоритмов адаптации для обработки гидроакустических сигналов<sup>1</sup>

*Рассмотрены адаптивные алгоритмы обработки сигналов антенных решеток в режиме реального времени с линейными ограничениями в приложении к задачам гидроакустики. Приведены результаты анализа указанных алгоритмов и их сравнительные характеристики. Даны рекомендации по использованию алгоритмов.*

### Алгоритм адаптации, гидроакустический сигнал, антенная решетка, процессор

**Задача обработки сигналов антенных решеток.** Сигнал, проходя через среду, искажается этой средой и смешивается с другими сигналами, в частности с шумами. В результате полезный сигнал поступает на приемник искаженным и зашумленным. При обработке такого сигнала задача адаптивного алгоритма состоит в оценивании его полезной составляющей с максимально возможной точностью. Другими словами, необходи-

мо достигнуть минимума среднеквадратической ошибки оценивания полезного сигнала за минимальное количество шагов адаптации.

В настоящей статье рассмотрены алгоритмы обработки, ориентированные на антенные решетки (АР) с большим количеством чувствительных элементов. Такие АР применяются на подводных лодках, надводных кораблях, станциях раннего обнаружения сейсмической активности. В настоящей статье алгоритмы адаптивной фильтрации

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (договор № 02.G25.31.0149 от 01.12.2015 г.).