



УДК 621.391

В. А. Пономарёв, О. В. Пономарёва

Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова

Инвариантность текущего энергетического Фурье-спектра комплексных дискретных сигналов на конечных интервалах

Рассмотрен анализ Фурье-спектров сигналов в базисе дискретных экспоненциальных функций. Приведены методы и алгоритмы скользящих измерений энергетических Фурье-спектров на конечных интервалах. Исследована инвариантность текущего энергетического Фурье-спектра сдвигу дискретных комплексных сигналов, не являющихся N -периодическими. Приведены теоретические и практические результаты анализа инвариантности текущих энергетических Фурье-спектров комплексных тональных компонентов.

Дискретный сигнал, конечный интервал, скользящие спектральные измерения, базис, дискретные экспоненциальные функции, текущий Фурье-спектр, инвариантность текущих энергетических Фурье-спектров, комплексные тональные компоненты

Благодаря преимуществам цифровой обработки сигналов (ЦОС) и проведению интенсивных исследований в данной области по созданию и разработке новых методов и алгоритмов ЦОС круг приложений цифрового спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах постоянно расширяется [1]–[10]. Согласно [11] спектральный анализ определяется как "измерение, которое дает точные или приближенные значения z -преобразования дискретного сигнала для заданных значений z ". Во многих приложениях ЦОС имеют дело с сигналами, энергетический Фурье-спектр (ЭФС) которых изменяется во времени [1]. Например с изменяющимися ЭФС, приходится иметь дело в радиолокации, виброакустической диагностике, распознавании и синтезе речи, пассивной гидролокации, биомедицине [1], [2]. Способ, позволяющий анализировать такие сигналы, называется скользящим спектральным измерением [3] и заключается в анализе текущего (скользящего) ЭФС сигнала во временном окне длительностью N отсчетов. Если при каждой последующей выборке временное окно смещается на один отсчет, то полученный спектр носит название текущего (скользящего) ЭФС (ТЭФС). Если временное окно смещается более чем на один отсчет, то полученный ЭФС называют скачущим (СЭФС).

Широкое применение дискретного экспоненциального базиса для анализа случайных сигналов на конечных интервалах во многом объясня-

ется тем, что ТЭФС N -периодических сигналов (N – количество отсчетов сигнала на периоде) $x(n \pm pN) = x(n)$; $n = \overline{0, N-1}$; $p = 1, 2, 3, \dots$, инвариантен временному сдвигу исходного сигнала [4]. Однако на практике исследуемый сигнал (даже если он периодичен) обычно не является N -периодическим (имеющим период, составляющий N отсчетов) сигналом, так как его период, как правило, априори неизвестен и невозможно выбрать конечный интервал анализа N равным периоду исходного сигнала. Приходится констатировать, что до настоящего времени вопрос инвариантности ТЭФС (и СЭФС) временному сдвигу комплексных сигналов, не являющихся N -периодическими сигналами, в литературе не рассматривался.

Целью настоящей статьи является исследование общего случая инвариантности ТЭФС комплексных дискретных сигналов на конечных интервалах и восполнение таким образом указанного пробела в теории спектральных измерений.

Анализ Фурье-спектров сигналов на конечных интервалах в базисе дискретных экспоненциальных функций. Теория спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в любом базисе базируется на трех основных и взаимосвязанных положениях [4], [5], [6]:

– определении сигнала на конечном множестве N точек;

– определении сдвига сигнала как некоторой операции по перестановке его отсчетов внутри конечного интервала;

– определении системы дискретных базисных функций.

Анализ Фурье-спектра сигнала на конечном интервале в базисе дискретных экспоненциальных функций основан на дискретном преобразовании Фурье (ДПФ), пара преобразований которого в обычной форме задается следующими соотношениями [3], [7]:

– прямое ДПФ:

$$S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}; \quad (1)$$

где $W_N = \exp(-j2\pi/N)$; $k = \overline{0, (N-1)}$;

– обратное ДПФ (ОДПФ):

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k) W_N^{-kn},$$

где $n = \overline{0, (N-1)}$.

ДПФ удовлетворяет всем перечисленным ранее положениям теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах:

– сигнал $x(n)$ задан на конечном интервале $\overline{0, (N-1)}$;

– сдвиг сигнала $x(n)$ определен как циклическая перестановка его отсчетов внутри интервала;

– в качестве базисной системы определена система дискретных экспоненциальных функций

$$\exp[-j(2\pi/N)kn]; \quad k, n = \overline{0, N-1}.$$

В рамках аппарата ДПФ [7], [8] вводятся понятия энергетического спектра:

$$G_N(k) = P_N(k)/\Delta f = N |S_N(k)|^2 \quad (2)$$

($\Delta f = 1/N$ – нормированная полоса частот сигнала) и спектра мощности:

$$P_N(k) = |S_N(k)|^2.$$

Переход от нормированной полосы Δf к полосе, реально занимаемой сигналом, осуществляется согласно выражению $\Delta f_{\text{ист}} = \Delta f F_c$, где F_c – частота дискретизации сигнала $x(n)$.

При применении аппарата ДПФ необходимо учитывать следующие важные моменты:

– свойства ДПФ имеют свою специфику и существенно отличаются от свойств преобразования Фурье непрерывных сигналов;

– ДПФ и ОДПФ подразумевают циклическое продолжение последовательностей отсчетов во временной и в частотной областях, соответственно, путем сдвига.

ДПФ наряду с достоинствами имеет и ряд недостатков, связанных с проявлением специфических эффектов, сопровождающих его практическое применение. Отметим два из них.

Коэффициенты ДПФ $S_N(k)$ последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, равны значениям z -преобразования [1], [4] этой последовательности на единичной окружности. Однако ДПФ не определяет значения z -преобразования такой последовательности между указанными точками.

Применению ДПФ сопутствует также эффект размывания спектральных составляющих (эффект утечки). Проявление данного эффекта объясняется тем, что ограничение протяженности сигнала представляет собой умножение на прямоугольное окно, порождающее в спектральной области циклическую свертку спектра исследуемой функции с функцией $\sin(Nx/2)/[N \sin(x/2)]$, имеющей конечную протяженность по частоте. В результате, энергия спектральной составляющей распределяется по частоте (отсюда и название эффекта).

Методы и алгоритмы анализа Фурье-спектров сигналов на конечных скользящих интервалах в базисе дискретных экспоненциальных функций. Одним из методов спектрального анализа в скользящем временном окне на k -й частоте является использование одной секции обобщенного комплексного фильтра на основе частотной выборки (ФОЧВ) (или нескольких секций такого фильтра при измерениях на нескольких частотах). В основе ФОЧВ лежит возможность реализации КИХ-фильтра с N ответвлениями в виде последовательного соединения гребенчатого фильтра и банка из N комплексных резонаторов. На рис. 1 представлен ФОЧВ, состоящий из гребенчатого фильтра и одного комплексного резонатора [1], [7].

Структура, приведенная на рис. 1, позволяет эффективно осуществлять скользящие спектральные измерения на фиксированном множестве частот:

$$2\pi k/N, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (3)$$

Следующим методом измерения является вычисление k -го бина (элемента разрешения спектра

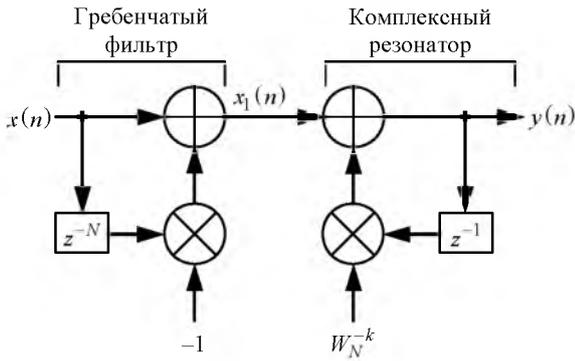


Рис. 1

по частоте) ДПФ (1) в скользящем окне длительностью N отсчетов:

$$S_N(k_m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n+m) W_N^{kn}, \quad k = \overline{0, N-1},$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$ – число отсчетов, на которое сдвигается окно длительностью N отсчетов вперед по сигналу $x(n)$ перед повторением измерения.

Оконный анализ фильтрацией частотной выборки более эффективен, чем анализ методом ДПФ. Это связано с тем, что структура ФОЧВ в отличие от ДПФ позволяет рекуррентно рассчитывать значения спектра на выходе комплексного резонатора. Действительно, из анализа структуры секции ФОЧВ (см. рис. 1) непосредственно следует, что в этом случае для выполнения скользящего спектрального измерения на k -й частоте необходимо (после выхода на режим скользящего измерения) выполнить всего два комплексных умножения на входной отсчет (при выполнении ДПФ необходимо выполнить N комплексных умножений).

В [3], [7] рассмотрен алгоритм однобинового скользящего ДПФ (СДПФ), который позволяет рекуррентно вычислять значение k -го бина N -точечного ДПФ в скользящем окне длительностью N отсчетов. Описанный алгоритм более эффективен (с точки зрения вычислений), чем алгоритм ДПФ. В результате появляется возможность проводить спектральный анализ с частотой прихода отсчетов входного сигнала.

Общим недостатком рассмотренных методов спектрального анализа в скользящем окне является фиксированность множества значений частот (3), на которых этот анализ можно осуществлять.

Рассмотрим вопрос инвариантности ТЭФС временному сдвигу входного комплексного сигнала во временном окне для двух видов его продолжения:

- реального продолжения входного сигнала;
- циклического продолжения сигнала.

Инвариантность текущего энергетического Фурье-спектра дискретных комплексных сигналов. Широкое применение преобразования Фурье к анализу стационарных процессов и систем главным образом основано на фундаментальном свойстве, отмеченном Н. Винером, – инвариантности экспоненциального базиса к циклическому сдвигу [5].

Введем символическое обозначение для ДПФ и ОДПФ N -периодической циклической последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$: $x(n) \leftrightarrow S_n^F(k)$. Тогда теорему сдвига для ДПФ можно записать в следующем виде:

$$\text{если } x(n) \leftrightarrow S_n^F(k), \text{ то } x(n+m) \leftrightarrow W_N^{-km} S_n^F(k).$$

Из данной теоремы непосредственно следует инвариантность энергетического спектра (2) N -периодической последовательности

$$x_N(n \pm pN) = x(n), \quad p = 1, 2, 3, \dots, \quad n = \overline{0, N-1},$$

ее сдвигу при циклическом продолжении сигнала.

Разностное уравнение СДПФ скользящего измерения на k -й частоте Фурье-спектра комплексного дискретного сигнала $x(n)$ при реальном его продолжении и при сдвиге временного окна на $m = 1, 2, 3, \dots$ отсчетов запишем в следующем виде [1], [3], [9]:

$$S_m(k) = W_N^{-k} S_{(m-1)}^\circ(k), \quad (4)$$

где

$$S_{(m-1)}^\circ(k) = S_{(m-1)}(k) - x(m-1) + x(m-1+N). \quad (5)$$

Начальное значение рекуррентного соотношения (5) $S_0(k) = S_{(m-1)}(k) \Big|_{m=1}$ является коэффициентом ДПФ на k -й частоте в момент заполнения апертуры фильтра отсчетами сигнала и тем самым выхода алгоритма на режим скользящего измерения.

Используя тригонометрическую форму записи комплексного числа и обозначив:

$$\begin{aligned} c(m) &= x(m-1+N) - x(m-1) = \\ &= \operatorname{Re} c(m) + j \operatorname{Im} c(m), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} c(m) &= \operatorname{Re} x(m-1+N) - \operatorname{Re} x(m-1); \\ \operatorname{Im} c(m) &= \operatorname{Im} x(m-1+N) - \operatorname{Im} x(m-1), \end{aligned}$$

запишем:

$$S_{(m-1)}(k) = |S_{(m-1)}(k)| [\cos \varphi_{(m-1)} + j \sin \varphi_{(m-1)}];$$

$$S_{(m-1)}^\circ(k) = |S_{(m-1)}^\circ(k)| [\cos \varphi_{(m-1)}^\circ + j \sin \varphi_{(m-1)}^\circ],$$

где

$$|S_{(m-1)}(k)| = \sqrt{\text{Re}^2 S_{(m-1)}(k) + \text{Im}^2 S_{(m-1)}(k)};$$

$$\cos \varphi_{(m-1)} = \text{Re} S_{(m-1)}(k) / |S_{(m-1)}(k)|;$$

$$\sin \varphi_{(m-1)} = \text{Im} S_{(m-1)}(k) / |S_{(m-1)}(k)|;$$

$$\begin{aligned} |S_{(m-1)}^\circ(k)| &= \\ &= \left(\left[\text{Re} S_{(m-1)}(k) + \text{Re} c(m) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\text{Im} S_{(m-1)}(k) + \text{Im} c(m) \right]^2 \right)^{0.5}; \end{aligned}$$

$$\cos \varphi_{(m-1)}^\circ = \left[\text{Re} S_{(m-1)}(k) + \text{Re} c(m) \right] / |S_{(m-1)}^\circ(k)|;$$

$$\sin \varphi_{(m-1)}^\circ = \left[\text{Im} S_{(m-1)}(k) + \text{Im} c(m) \right] / |S_{(m-1)}^\circ(k)|.$$

Опираясь на известное соотношение для модулей комплексных чисел

$$|(a + jb)(c + jd)| = |(a + jb)| |(c + jd)|$$

и дополнительно учтя, что

$$W_N^{-k} = \cos \beta_k + j \sin \beta_k; \quad |W_N^{-k}| = 1; \quad \beta_k = (2\pi/N)k;$$

$$\begin{aligned} S_m(k) &= \\ &= |S_m(k)| \left\{ \cos \left[\varphi_{(m-1)}^\circ + \beta_k \right] + j \sin \left[\varphi_{(m-1)}^\circ + \beta_k \right] \right\}; \\ |S_{(m-1)}^\circ(k)| &= |S_m(k)|, \end{aligned}$$

представим разностное уравнение (4) в следующей форме:

$$\begin{aligned} S_m(k) &= W_N^{-k} S_{(m-1)}^\circ(k) = |S_{(m-1)}^\circ(k)| \times \\ &\times \left\{ \cos \left[\varphi_{(m-1)}^\circ + \beta_k \right] + j \sin \left[\varphi_{(m-1)}^\circ + \beta_k \right] \right\} = \\ &= |S_m^\circ(k)| \left\{ \cos \left[\varphi_{(m-1)}^\circ + \beta_k \right] + j \sin \left[\varphi_{(m-1)}^\circ + \beta_k \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varphi_{(m-1)}^\circ = \arccos \left[\text{Re} S_{(m-1)}^\circ(k) / |S_{(m-1)}^\circ(k)| \right]$.

Из соотношения (6) непосредственно определяется значение ТЭФС комплексного сигнала на k -й частоте:

$$\begin{aligned} G_m(k) &= N |S_{(m-1)}^\circ(k)|^2 = \\ &= N \left\{ \left[\text{Re} S_{(m-1)}(k) + \text{Re} c(m) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\text{Im} S_{(m-1)}(k) + \text{Im} c(m) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, ТЭФС сигнала $x(n)$ на k -й частоте инвариантен временному сдвигу сигнала (т. е. не зависит от сдвига сигнала m), если

$$c(m) = \text{Re} c(m) + j \text{Im} c(m) = 0.$$

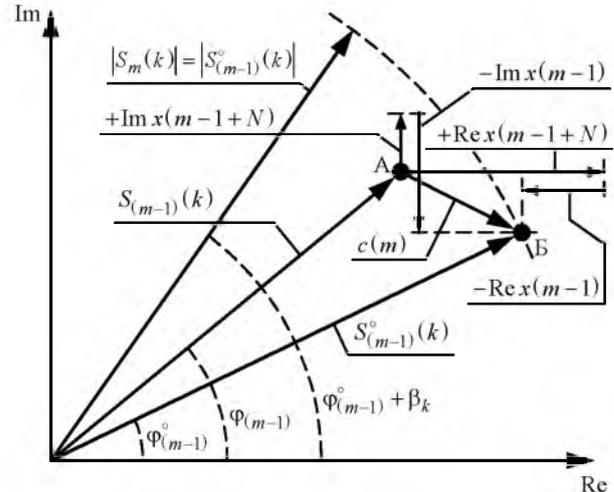


Рис. 2

Один частный (встречающийся на практике) случай выполнения этого условия описывается (4). Другой частный случай рассмотрен далее при исследовании инвариантности ТЭФС отдельного комплексного тонального компонента.

В общем же случае ТЭФС комплексного сигнала $x(n)$ не инвариантен временному сдвигу сигнала при его реальном продолжении. Полученный эффект авторы настоящей статьи назвали, по аналогии с уже существующими эффектами, сопровождающими ЦОС (некоторые из которых рассмотрены ранее), эффектом неинвариантности ТЭФС.

Графическая интерпретация рекуррентного измерения m -го значения текущего Фурье-спектра комплексного сигнала на k -й частоте приведена на рис. 2. Точка А соответствует спектру, измеренному на предыдущем шаге, точка Б – спектру, измеренному на следующем шаге.

Инвариантность текущего энергетического Фурье-спектра комплексных тональных компонентов и их суммы. Рассмотрим инвариантность ТЭФС комплексных гармонических компонентов вида

$$x(n) = \cos \left[(2\pi/N)(k+q)n \right] + j \sin \left[(2\pi/N)(k+q)n \right], \quad (8)$$

где $0 \leq q < 1$; $k = \overline{1, N/2}$.

Если параметр q , характеризующий несогласованность периода гармонического компонента с интервалом анализа N , равен нулю, то в этом интервале точно размещается целое число периодов комплексного тонального сигнала (8) и ТЭФС этого сигнала инвариантен его временному сдвигу. При этом случае реальное продолжение сигнала во временном окне совпадает с циклическим

(периодическим) продолжением сигнала, которое навязывается ДПФ [6].

Ранее показано (7), что для инвариантности ТЭФС произвольного входного сигнала $x(n)$ k -й частоты временному сдвигу достаточно выполнения условия $c(m) = 0$. Для рассматриваемого частного случая введем функцию двух переменных $c(m, q)$, аналогичную функции $c(m)$:

$$c(m, q) = x(m-1+N) - x(m-1) = \operatorname{Re} c(m, q) + j \operatorname{Im} c(m, q), \quad (9)$$

где

$$\operatorname{Re} c(m, q) = \cos \left[\left(\frac{2\pi}{N} \right) (k+q)(m-1+N) \right] - \cos \left[\left(\frac{2\pi}{N} \right) (k+q)(m-1) \right];$$

$$\operatorname{Im} c(m, q) = \sin \left[\left(\frac{2\pi}{N} \right) (k+q)(m-1+N) \right] - \sin \left[\left(\frac{2\pi}{N} \right) (k+q)(m-1) \right].$$

Применив тригонометрические тождества:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left[\frac{(\alpha + \beta)}{2} \right] \sin \left[\frac{(\alpha - \beta)}{2} \right];$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left[\frac{(\alpha + \beta)}{2} \right] \sin \left[\frac{(\alpha - \beta)}{2} \right],$$

преобразуем выражение (9) к виду

$$\begin{aligned} c(m, q) &= \\ &= -2 \sin(\pi q) \sin \left[\left(\frac{2\pi}{N} \right) (k+q)(m-1) + \pi q \right] + \\ &+ j 2 \sin(\pi q) \cos \left[\left(\frac{2\pi}{N} \right) (k+q)(m-1) + \pi q \right] = \\ &= 2j \sin(\pi q) \left\{ \cos \left[\left(\frac{2\pi}{N} \right) (k+q)(m-1) + \pi q \right] + \right. \\ &\quad \left. + j \sin \left[\left(\frac{2\pi}{N} \right) (k+q)(m-1) + \pi q \right] \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Таким образом, функция $c(m, q)$ (9), характеризующая инвариантность ТЭФС сигнала $x(n)$ (8) на k -й частоте, при $q = \text{const}$ представляет собой комплексное гармоническое колебание (10) с ам-

плитудой $2j \sin(\pi q)$, фазой πq и частотой $(k+q)$. При этом инвариантность ТЭФС сигнала $x(n)$ (8) имеет место лишь при $q = 0$.

На рис. 3 показана функция $c(m, q)$ для различных значений параметра q при фиксированных значениях частоты k и длительности окна $N = 64$ отсчета. Из соотношения (10) и рис. 3 следует, что гармонический компонент функции $c(m, q)$ при $q = 1/2$ имеет максимальную амплитуду, равную 2.0, а из соотношения (10) – что при изменении частоты гармонического сигнала (8) амплитуды гармонических компонентов функции $c(m, q)$ зависят исключительно от значения параметра q и не зависят от N и k .

На рис. 4 приведены верхняя и нижняя огибающие поверхности, между которыми расположены комплексные гармонические компоненты функции $c(m, q)$ при изменении значений параметра q .

Рассмотрим характеристики гармонических компонентов функции $c(m, q)$. Записав параметр комплексного гармонического компонента $x(n)$ (8) в виде $q = 1/r$ (r – целое), получим, что интервал $N_1 = Nr$ является периодом функции $x_1(n)$ – реального продолжения $x(n)$. Следовательно, при любых q и k средние значения действительной и мнимой частей гармонических компонентов функции $c(m, q)$ на интервале $N_1 = Nr$ будут равны нулю:

$$\begin{aligned} M[c(m, q)] &= \\ &= \frac{1}{N_1} \sum_{n=0}^{N_1-1} \operatorname{Re} x_1(n) = \frac{1}{N_1} \sum_{n=0}^{N_1-1} \operatorname{Im} x_1(n) = 0, \end{aligned}$$

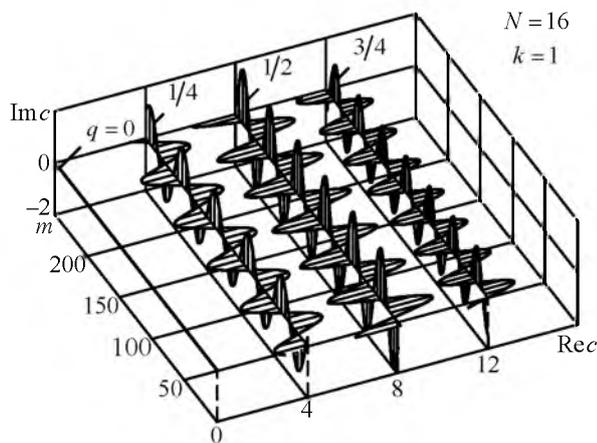


Рис. 3

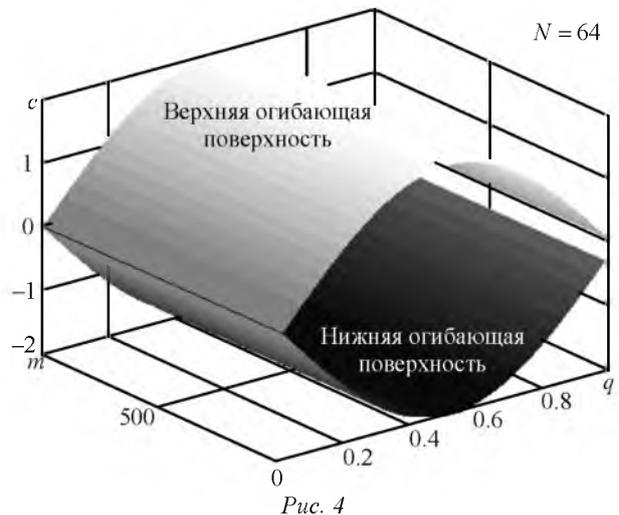


Рис. 4

а их дисперсии составят:

$$D[\operatorname{Re} c(m, q)] = \frac{1}{N_1} \sum_{n=0}^{N_1-1} \operatorname{Re}^2 x_1(n);$$

$$D[\operatorname{Im} c(m, q)] = \frac{1}{N_1} \sum_{n=0}^{N_1-1} \operatorname{Im}^2 x_1(n).$$

На рис. 5 приведен график зависимости дисперсий действительной $D[\operatorname{Re} c]$ и мнимой $D[\operatorname{Im} c]$ частей гармонических компонентов функции $c(m, q)$ от q . Указанные дисперсии максимальны при $q = 1/2$.

Можно показать, что ТЭФС отдельного комплексного тонального компонента вида (8) инвариантен к временному сдвигу и при $q \neq 0$ (это второй частный случай инвариантности ТЭФС сигнала, первый случай был рассмотрен ранее). В данном случае точки А и Б (см. рис. 2) могут находиться согласно соотношению (4) на одной окружности, в силу чего возникает указанная инвариантность при $q \neq 0$.

Рассмотрим инвариантность ТЭФС сигнала $x(n)$, представляющего собой сумму комплексных гармонических компонентов вида (8).

В соответствии с теоремой сдвига [1], [3], [4] ДПФ N -периодической циклической последовательности $x(n)$ (как комплексной, так и действительной), сдвинутой во времени вперед на m отсчетов, приводит к фазовому сдвигу каждого k -го бина ДПФ на $2\pi km/N$ радиан, а при таком же сдвиге назад – на $-2\pi km/N$. Поскольку $x(m-1) = x(m-1+N)$, из (5) следует $S_{(m-1)}^\circ(k) = S_{(m-1)}(k)$, т. е. ТЭФС N -периодического сигнала $x(n)$ инвариантен временному сдвигу.

Таким образом, для сохранения инвариантности ТЭФС сигнала $x(n)$ (а следовательно, и справедливости для него теоремы сдвига) необходимо, чтобы все периоды гармонических колебаний, входящих в

состав $x(n)$, были кратны интервалу анализа N , так как только в данном случае сигнал $x(n)$ будет N -периодическим. При этом гармонические колебания, входящие в состав $x(n)$, в общем случае могут иметь различные начальные фазы.

Рассмотрим взаимосвязь ДПФ сигнала, заданного на конечном интервале, с дискретно-временным преобразованием Фурье (ДВПФ) и с операцией дополнения нулями. Известно [1], что ДВПФ представляет собой z -преобразование сигнала $x(n)$ (1), вычисленное на единичной окружности:

$$S(f) = S(z) \Big|_{z=\exp(-j2\pi f)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-2\pi fn);$$

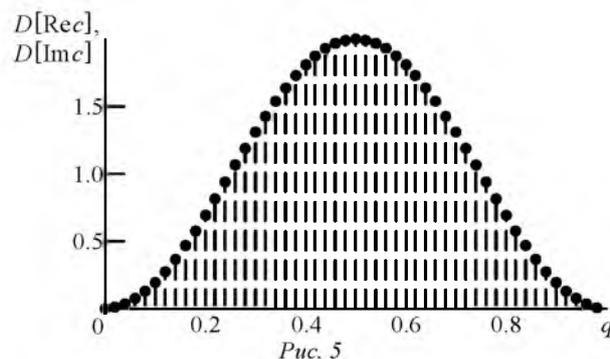
$$-1/2 \leq f \leq 1/2.$$

В то же время коэффициенты ДПФ $S_N(k)$ последовательности $x(n)$ по определению (1) равны значениям ее z -преобразования в точках $2\pi k/N$, $k = \overline{0, N-1}$, равномерно расположенных на единичной окружности (рис. 6).

На рис. 6 приведены ДВПФ сигнала $x(n) = \exp[j(2\pi/N)kn]$, $n = \overline{0, N-1}$, при $N = 16$, $k = 4$, $M = 32$ (штриховая линия), ДПФ сигнала (отсчеты отмечены маркером "★") и интерполированные значения ДВПФ (отсчеты отмечены маркером "●"). Из рисунка следует, что ДПФ равен ДВПФ в точках $2\pi k/N$, $k = \overline{0, N-1}$.

С помощью процесса, получившего название операции дополнения нулями (ОДН), можно вычислить значения ДВПФ между точками $2\pi k/N$, $k = \overline{0, N-1}$, на единичной окружности. Суть операции дополнения нулями заключается в получении сигнала $x_1(n)$ дополнением исходного сигнала $x(n)$ нулевыми отсчетами (рис. 6, маркеры "○") до длины $M = pN$ (обычно M является целой степенью 2) и последующим вычислением ДПФ сигнала $x_1(n)$. В результате получим не только значения ДПФ, равные значениям ДВПФ в точках $2\pi k/N$, $k = \overline{0, N-1}$, но и интерполированные значения ДВПФ между этими точками. В предельном случае при бесконечном числе вводимых нулевых отсчетов ДПФ сигнала $x_1(n)$ может рассматриваться как ДВПФ сигнала $x(n)$.

Рассмотрим ТЭФС сигнала $x(n)$, являющегося суммой комплексных гармонических компо-



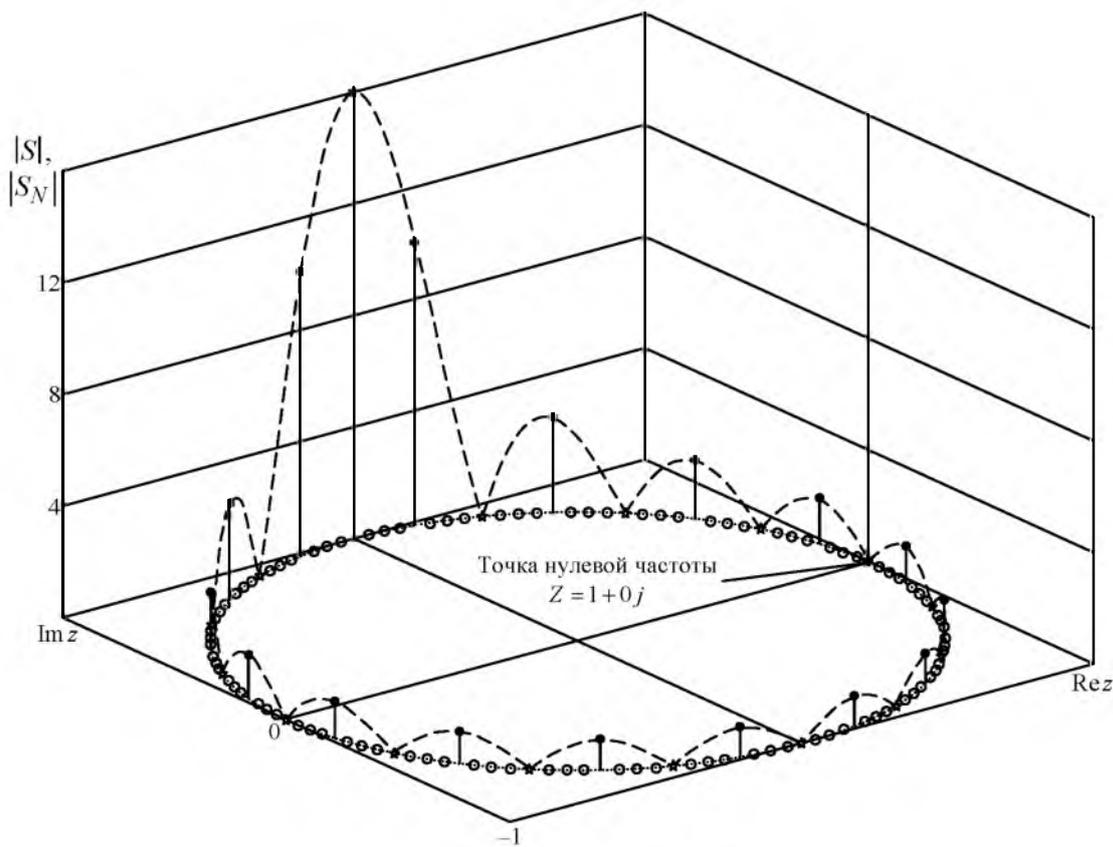


Рис. 6

нентов вида (8), при различных значениях параметра q . Прежде всего отметим, что из полученных результатов следует, что если периоды некоторых составляющих не кратны интервалу анализа N , ТЭФС такого сигнала не будет инвариантным временному сдвигу, так как для него теорема сдвига несправедлива. При этом часть гармонических колебаний (или все гармонические колебания), входящие в состав сигнала $x(n)$, могут быть периодическими, но на другом интервале $N_1 > N$.

Для иллюстрации эффекта неинвариантности ТЭФС проанализирован сигнал в виде суммы двух комплексных гармонических компонентов вида (8):

$$x_1(n) = \sum_{i=1}^2 \left\{ \cos \left[(2\pi/N)(k_i + q_i)n \right] + j \sin \left[(2\pi/N)(k_i + q_i)n \right] \right\} \quad (11)$$

при $N = 16$; $n = \overline{0, 15}$; $k_1 = 6$; $k_2 = 8$; $q_1, q_2 = 0, 1/4, 1/2$.

Сигнал $x_1(n)$ дополнялся 240 нулевыми отсчетами. В условиях его естественного продолжения рассчитывался ЭФС при $m = 10$ сдвигах на один отсчет. ЭФС исходного сигнала, полученные методом ДПФ с помощью ОДН, сведены в один график (рис. 7). Нали-

чие набора кривых на рис. 7 характеризует изменение ДВПФ сигнала $x(n)$ от сдвига при естественном продолжении входного сигнала и, следовательно, с учетом взаимосвязи ДПФ и ДВПФ характеризует неинвариантность ТЭФС исходного сигнала.

Эффект неинвариантности ТЭФС модельного сигнала (11) также иллюстрируется результатами определения его ТЭФС при различных значениях параметров q_1 и q_2 , (рис. 8)¹. На рис. 8 проявляются два артефакта, сопровождающих цифровую спектральную обработку рассматриваемого сигнала. Это известный эффект размывания спектральных составляющих (утечки – leakage) и эффект неинвариантности (non-invariance), выявленный в настоящей статье (см. рис. 7). При $q = 0$ (рис. 8, а) ни один из эффектов не проявляется. Отсутствие проявления в этом случае эффекта утечки объясняется тем, что позиции коэффициентов ДПФ совпадают с нулями ДВПФ на единичной окружности отрезка гармонического компонента. А отсутствие проявления эффекта

¹ Существенное различие масштабов на осях ординат на рис. 7 и 8 объясняется различием в нормирующем множителе в (1). В первом случае (рис. 7) нормировка при определении ТЭФС осуществлялась для дополненной нулевыми отсчетами последовательности, содержащей в 16 раз больше отсчетов, чем исходная последовательность, ТЭФС которой приведена на рис. 8.

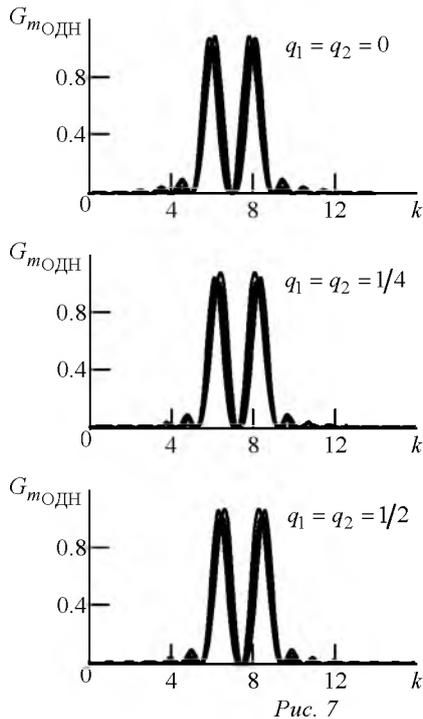


Рис. 7

неинвариантности связано с тем, что естественное продолжение сигнала во временном окне совпадает с его периодическим продолжением, навязываемым ДПФ. Если же $q \neq 0$ (рис. 8, б, в), то проявляются оба эффекта: эффект размывания спектральных составляющих и эффект неинвариантности ТЭФС временному сдвигу сигнала.

На основании проведенных исследований могут быть сделаны следующие выводы.

Переход от аналоговых методов спектральных измерений к цифровым методам имеет специфику в каждой предметной области. Такой переход должен сопровождаться дополнительными исследованиями структуры анализируемых сигналов, а также процессов и эффектов, сопровождающих переход.

Проведение подобных исследований представляется важным и актуальным по крайней мере по двум причинам.

1. Сигналы в каждой предметной области имеют свою специфику, учет которой позволяет при переходе к цифровым методам разрабатывать более эффективные методы спектральных измерений с точки зрения как точности, так и времени измерений. Свойства ДПФ имеют свою специфику и су-

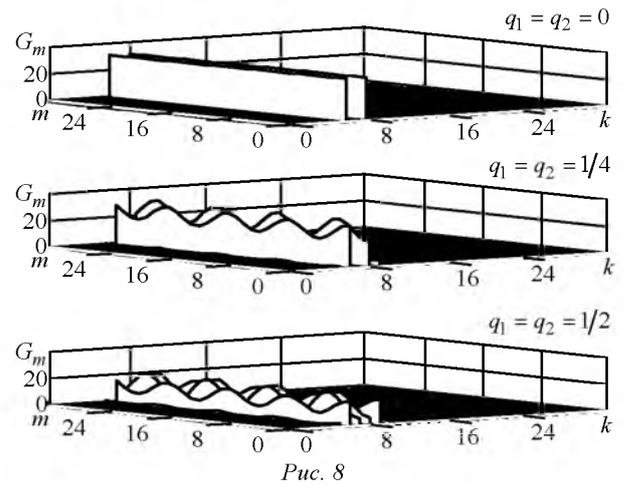


Рис. 8

щественно отличаются от свойств преобразования Фурье непрерывных сигналов. Их нельзя рассматривать как свойства, основанные на свойствах преобразования Фурье непрерывных сигналов.

2. У исследователей часто превалируют знания в конкретной предметной области, а не в области цифровых методов обработки сигналов. И, как показывает практика, некоторые известные (а тем более неизвестные) процессы и эффекты, возникающие в приложениях цифрового спектрального анализа, ускользают от внимания исследователей, что может привести к ошибочным выводам.

Проведенные исследования выявленного авторами настоящей статьи эффекта неинвариантности текущего энергетического Фурье-спектра к сдвигу сигналов позволяют:

- во-первых, по-новому взглянуть на результаты измерения текущих Фурье-спектров и текущих энергетических Фурье-спектров комплексных сигналов на конечных интервалах, а также дать численную оценку неинвариантности текущих энергетических Фурье-спектров комплексных тональных компонентов;
- во-вторых, повысить эффективность применения цифрового спектрального анализа во многих его приложениях, в частности при решении задач по обнаружению и выявлению скрытых периодичностей (гармонических, тональных) компонентов в таких предметных областях, как радиолокация, виброакустическая диагностика, пассивная гидролокация, биомедицина и т. п.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов / пер. с англ. 2-е изд. М.: ООО "Бином-Пресс", 2007. 656 с.
2. Пономарёв В. А., Пономарёва О. В. Виброакустическое диагностирование коробок передач станков цифровыми методами // Станки и инструмент. 1983. № 9. С. 18–21.
3. Пономарёва О. В., Пономарёв А. В., Пономарёва Н. В. Скользящее параметрическое ДПФ в задачах обнаружения тональных компонент // Цифровая обработка сигналов. 2012. № 4. С. 2–7.
4. Пономарёва О. В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных ин-

тервалах в базисе параметрических дискретных экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов. 2010. № 2. С. 7–12.

5. Пономарёва О. В., Алексеев В. А., Пономарёв В. А. Цифровой периодограммализ и проблемы его практического применения // Вестн. ИжГТУ. 2013. № 2. С. 130–133.

6. Пономарёв В. А., Пономарёва О. В. Обобщение дискретного преобразования Фурье для интерполяции во временной области // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1983. Т. XXVI, № 9. С. 67–68.

7. Пономарёва О. В., Пономарёва Н. В. Модификация фильтра на основе частотной выборки для решения задач цифровой обработки случайных процессов со скрытыми периодичностями // Интеллектуальные системы в производстве. 2012. № 2. С. 122–129.

8. Пономарёв В. А., Пономарёва О. В. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. 2011. № 1. С. 2–6.

9. Пономарёва О. В., Пономарёв А. В., Пономарёв В. А. Обобщение алгоритма Герцеля для решения задач выявления скрытых периодичностей // Интеллектуальные системы в производстве. 2013. № 1. С. 41–46.

10. Пономарёв В. А., Пономарёва О. В. Временные окна при оценке энергетических спектров методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Автометрия. 1983. № 4. С. 39–45.

11. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.

V. A. Ponomarev, O. V. Ponomareva

Kalashnikov Izhevsk state technical university

Invariance of current energy fourier spectrums of discrete complex signals on finite intervals

The issues of measuring Fourier spectrum of signals in the base of discrete exponential functions were analyzed. Methods and algorithms of sliding measurements of energy Fourier spectrums of signals on finite intervals were described. The invariance of current energy Fourier spectrum to moving discrete real signals (which are not N-periodic) were investigated. Theoretical and practical results of analysis of invariance current energy Fourier spectrum of complex tonal components were shown.

Discrete signal, finite interval, "sliding" spectral measurement, basis, discrete exponential functions, current Fourier spectrum, invariance of the current Fourier spectrums, tonal components

Статья поступила в редакцию 14 февраля 2014 г.

УДК 621.3.001

А. Г. Силина, М. В. Соклакова, Э. П. Чернышёв

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина)

Особенности аналитической оценки устойчивости несимметричных автоколебаний в релейной гистерезисной цепи с фильтром нижних частот

Рассмотрены несимметричные автоколебания в релейных цепях с фильтром нижних частот в контуре обратной связи. Приведены основы новой методики расчета параметров автоколебаний.

Релейная система, автоколебания, переходная характеристика, устойчивость, передаточная функция, дискретные цепи

Релейные автоколебательные системы широко применяются в различных областях благодаря простоте своей реализации и дешевизне. В настоящей статье рассмотрены некоторые вопросы развития аналитических методов расчета [1], [2] автоколебательных несимметричных релейных цепей (РЦ). Именно такие точные методы анализа автоколебаний (АК) в замкнутой форме позволя-

ют строго оценивать точность приближенных методов расчета нелинейных цепей и систем, в том числе использующих классический графоаналитический анализ АК по их первой гармонике [3].

В отличие от описанного в [2] метода "Мт" для анализа устойчивости симметричных АК (где расчет производится на интервале, равном половине периода АК τ) авторами разрабатывается