тервалах в базисе параметрических дискретных экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов. 2010. № 2. С. 7–12.

5. Пономарёва О. В., Алексеев В. А., Пономарёв В. А. Цифровой периодограмманализ и проблемы его практического применения // Вестн. ИжГТУ. 2013. № 2. С. 130–133.

6. Пономарёв В. А., Пономарёва О. В. Обобщение дискретного преобразования Фурье для интерполяции во временной области // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1983. Т. XXVI, № 9. С. 67–68.

7. Пономарёва О. В., Пономарёва Н. В. Модификация фильтра на основе частотной выборки для решения задач цифровой обработки случайных процессов со скрытыми периодичностями // Интеллектуальные системы в производстве. 2012. № 2. С. 122–129.

8. Пономарёв В. А., Пономарёва О. В. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. 2011. № 1. С. 2–6.

9. Пономарёва О. В., Пономарёв А. В., Пономарев В. А. Обобщение алгоритма Герцеля для решения задач выявления скрытых периодичностей // Интеллектуальные системы в производстве. 2013. № 1. С. 41–46.

10. Пономарёв В. А., Пономарёва О. В. Временные окна при оценке энергетических спектров методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Автометрия. 1983. № 4. С. 39–45.

11. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.

V. A. Ponomarev, O. V. Ponomareva
Kalashnikov Izhevsk state technical university

Invariance of current energy fourier spectrums of discrete complex signals on finite intervals

The issues of measuring Fourier spectrum of signals in the base of discrete exponential functions were analyzed. Methods and algorithms of sliding measurements of energy Fourier spectrums of signals on finite intervals were described. The invariance of current energy Fourier spectrum to moving discrete real signals (which are not N-periodic) were investigated. Theoretical and practical results of analysis of invariance current energy Fourier spectrum of complex tonal components were shown.

Discrete signal, finite interval, "sliding" spectral measurement, basis, discrete exponential functions, current Fourier spectrum, invariance of the current Fourier spectrums, tonal components

Статья поступила в редакцию 14 февраля 2014 г.

УДК 621.3.001

А. Г. Силина, М. В. Соклакова, Э. П. Чернышёв
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина)

Особенности аналитической оценки устойчивости несимметричных автоколебаний в релейной гистерезисной цепи с фильтром нижних частот

Рассмотрены несимметричные автоколебания в релейных цепях с фильтром нижних частот в контуре обратной связи. Приведены основы новой методики расчета параметров автоколебаний.

Релейная система, автоколебания, переходная характеристика, устойчивость, передаточная функция, дискретные цепи

Релейные автоколебательные системы широко применяются в различных областях благодаря простоте своей реализации и дешевизне. В настоящей статье рассмотрены некоторые вопросы развития аналитических методов расчета [1], [2] автоколебательных несимметричных релейных цепей (РЦ). Именно такие точные методы анализа автоколебаний (АК) в замкнутой форме позволяют строго оценивать точность приближенных методов расчета нелинейных цепей и систем, в том числе использующих классический графоаналитический анализ АК по их первой гармонике [3].

В отличие от описанного в [2] метода "$M\tau$" для анализа устойчивости симметричных АК (где расчет производится на интервале, равном половине периода АК τ) авторами разрабатывается более общий метод "*MT*", где АК анализируются на их периоде *T*, что позволяет оценивать АК сложной несимметричной формы.

В настоящей статье:

– описаны основные особенности предложенного метода "*MT*" на конкретном примере;

– исследована устойчивость несимметричных АК (чего нет в [2], [3]);

– рассмотрен случай наличия фильтра нижних частот (ФНЧ) первого порядка в цепи обратной связи РЦ, что не предусмотрено методикой [3] даже в случае симметричных АК.

Описание исследуемой релейной цепи. Рассматривается релейный элемент (РЭ) с несимметричной нормированной гистерезисной характеристикой $y(x)$, характеризующейся следующими параметрами:

– нормированным максимальным значением сигнала на выходе РЭ $y_{\max} = 1$;

– нормированным минимальным значением сигнала на выходе $y_{\min} = -1$;

– переключением с уровня $y_{\min}$ к уровню $y_{\max}$, происходящим мгновенно при входном сигнале $x = \sigma_1$;

– обратным переключением $y_{\max}$ на $y_{\min}$, происходящим мгновенно при $x = \sigma_2 < \sigma_1$.

В линейной части (ЛЧ) РЦ находится ФНЧ с нормированной передаточной функцией (ПФ)

$$H(s) = X(s)/Y(s) = -k/(s+1), \tag{1}$$

где s – аргумент преобразования Лапласа; $X(s) \div x(t)$, $Y(s) \div y(t)$ – изображения по Лапласу входного и выходного сигналов РЭ соответственно; t – время.

В работе использовано классическое (по Ляпунову) условие устойчивости АК [2], [3]:

$$\left|x_\xi(0)\right| < \varepsilon \to \left|x_\xi(t)\right| \le \beta(\varepsilon);\ t \to \infty, \tag{2}$$

т. е. при начальном значении вариации (приращения сигнала) $x_\xi = \tilde{x} - x$, меньшим бесконечно малой ε, будем иметь модуль вариации в (2) меньшим бесконечно малой $\beta(\varepsilon)$ ($\tilde{x}$ – описание возмущенного сигнала).

Аналитическое описание несимметричных автоколебаний. Используем базирующуюся на [1] методику расчета (результаты которого легко проверяются в случае рассматриваемого "простого" ФНЧ). Считаем, что исходное срабатывание РЭ (переключение к уровню $y_{\max}$) происходит при $t = 0$, обратное переключение (к уровню $y_{\min}$) – при $t = t_1$, а далее несимметричные АК происходят циклически с периодом T. Тогда изображение по Лапласу условного первого импульса АК в интервале первого периода

$$Y_1(s) = \frac{1 - 2e^{-st_1} + e^{-sT}}{s},$$

причем коэффициент 2 во втором члене изображения обусловлен обратным переключением от уровня $y_{\max}$ к уровню $y_{\min}$.

Изображение всей периодической последовательности импульсов на выходе РЭ для $t > 0$ согласно [4] имеет вид $Y(s) = Y_1(s)/\left(1 - e^{-sT}\right)$, поскольку отражает сумму убывающей геометрической прогрессии:

$$Y(s) = Y_1(s)\left[1 + e^{-sT} + e^{-s2T} + e^{-s3T} + \ldots\right].$$

Тогда изображение сигнала на входе РЭ с учетом (1) имеет вид

$$X(s) = Y(s)H(s) = \frac{-k\left(1 + 2e^{-st_1} + e^{-sT}\right)}{s(s+1)\left(1 - e^{-sT}\right)}.$$

Разложив его на сумму свободной и вынужденной составляющих, с учетом [4] получим

$$X(s) = X_{\text{св}}(s) + X_{\text{вын}}(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{X_1(s)}{1 - e^{-sT}},$$

где

$$A_1 = (s+1)X(s)\big|_{s=-1} = \frac{k\left(1 - 2e^{t_1} + e^{T}\right)}{1 - e^{T}}$$

– коэффициент A_1 в свободной составляющей $X_{\text{св}}(s)$; $X_1(s)$ – изображение для условного первого периода вынужденной составляющей $X_{\text{вын}}(s)$.

Искомое описание $X_1(s)$ условного первого периода вынужденной составляющей в интервале $0 < t < T$:

$$X_1(s) = H_1(s)\left(1 - 2e^{-st_1}\right) - A_1/(s+1), \tag{3}$$

причем здесь отброшены составляющие, действующие вне интервала первого периода $0 < t < T$. При этом переходная характеристика $h_1(t)$ ЛЧ цепи

$$H_1(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{-k}{s(s+1)} \div$$

$$\div\, h_1(t) = \left(-k + ke^{-t}\right)\delta_1(t), \tag{4}$$

где $\delta_1(t)$ – единичная ступенчатая функция [4].

Согласно (3), (4) искомое описание первого периода АК

$$x_1(t) = \left(-k + ke^{-t}\right)\delta_1(t) -$$
$$-A_1 e^{-t}\delta_1(t) - 2\left[-k + ke^{-(t-t_1)}\right]\delta_1(t - t_1). \quad (5)$$

Для определения моментов переключения t_1 и T необходимо, использовав (5), решить систему нелинейных уравнений. Первое из них

$$x_1(0) = \sigma_1 = -A_1 = \frac{-k\left(1 - 2e^{t_1} + e^T\right)}{1 - e^T}. \quad (6)$$

Второе уравнение найдем из условия

$$x_1(t_1) = \sigma_2 = -k + ke^{-t_1} - \frac{k\left(1 - 2e^{t_1} + e^T\right)}{1 - e^T}.$$

После преобразований с учетом (6) получим

$$\sigma_2 = -k + ke^{-t_1} + \sigma_1 e^{-t_1}.$$

Обозначив $e^{t_1} = b,\ e^T = a,$ получим систему

$$\begin{cases} -\sigma_1/k = (1 - 2b + a)/(1 - a); \\ \sigma_2 = -k + k/b + \sigma_1/b, \end{cases}$$

из которой найдем параметр b, а затем a, определяющие моменты переключения t_1 и T. В результате имеем:

$$b = \frac{k + \sigma_1}{k + \sigma_2} = e^{t_1};\ \ a = \frac{2b - 1 - \sigma_1/k}{1 - \sigma_1/k} = e^T.$$

Пример 1. Для $k = 4,\ \ \sigma_1 = 3,\ \ \sigma_2 = 1$ получим $a = e^T = 4.2,\ \ b = e^{t_1} = 1.4.$

Пример 2. Для $k = 4,\ \ \sigma_1 = 2,\ \ \sigma_2 = -1$ получим $T = \ln 5,\ \ t_1 = \ln 2.$

Таким образом, найдено выражение (5), описывающее несимметричные АК в интервале первого периода $0 < t < T$, причем согласно (6) коэффициент $A = -\sigma_1$ определяется порогом срабатывания РЭ.

Использование теории дискретных цепей для анализа устойчивости автоколебаний методом "*МТ*". Предложенный метод во многом аналогичен описанному в [2], [5] и опирается на применение теории дискретных цепей (ДЦ). Как и в [3], при анализе устойчивости АК "возмущающим фактором" $f_{\text{вх}}(t) = \varepsilon\delta(t)$ считаем "исчезающее воздействие" вида дельта-функции [4] $\delta(t)$, имеющей бесконечно малую площадь ε согласно условию (2). Это воздействие смещает начальный момент переключения РЭ от "возмущенного сигнала"

$$\tilde{x}(t) = f_{\text{вх}}(t) + x(t) = \varepsilon\delta\left(t^-\right) + x(t), \quad (7)$$

причем момент t^- соответствует моменту $\left(t - \Delta_0\right)$, где Δ_0 – бесконечно малый интервал исходного смещения.

В результате, все моменты nT срабатывания РЭ на каждом последующем n-м переключении РЭ через период смещаются на

$$\Delta t_n = x_\xi(nT)/\dot{x}_0, \quad (8)$$

где $x_\xi(nT)$ – вариация сигнала на входе РЭ в моменты $nT;\ \ \dot{x}_0 = \dot{x}\left(0^-\right) = \dot{x}\left(T^-\right)$ – скорость изменения координаты в моменты переключения РЭ через период nT.

Вариация сигнала на выходе РЭ $y_\xi(t)$ при $t = nT$ представляет собой короткие прямоугольные импульсы бесконечно малой площади, которые согласно [4] можно приближенно описать дельта-функциями:

$$y_\xi(t) = 2\Delta t_n \delta(t - nT), \quad (9)$$

причем коэффициент 2 обусловлен переключениями РЭ с уровня $y_{\min}$ к уровню $y_{\max}$.

С учетом (7)–(9) уравнения для вариаций АК в РЦ в дискретные моменты времени $t = nT$ запишем в виде

$$\begin{aligned} y_\xi(nT) &= 2\dot{x}_0^{-1}\left[\varepsilon\delta_0(nT) - x_\xi(nT)\right]; \\ X_\xi(s) &= Y_\xi(s)H(s), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\delta_0(nT)$ – дискретная дельта-функция [4].

Уравнения (10) предопределяют необходимость анализа устойчивости АК переходом к уравнениям эквивалентной ДЦ в дискретные моменты времени $t = nT$. При использовании z-преобразования [4] получим вместо (10) для ДЦ

$$Y_\xi(x) = 2\dot{x}_0\left[\varepsilon - X_\xi(z)\right];\ \ X_\xi(z) = Y_\xi(z)H_{\text{д}}(z), \quad (11)$$

где $H_{\text{д}}(z) \div h_{\text{д}}(nT)$ – передаточная функция и соответствующая ей импульсная характеристика (ИХ) ДЦ, которая описывает ЛЧ релейной цепи.

При сделанных в (9) допущениях ИХ ДЦ найдем методом соответствия ИХ аналоговой и дискретной цепей. Импульсная характеристика $h(t) = h_1'(t) \div H(s)$ на основании (1) или (4) определяется как

$$h(t) = ke^{-t}\delta_1(t). \qquad (12)$$

Однако использование (12) для перехода к ИХ ДЦ в (11) является непростым и будет описано далее.

ПФ замкнутой системы (11)

$$H_з(z) = \frac{X_\xi(z)}{\varepsilon} = \frac{2\dot{x}_0^{-1}H_д(z)}{1 - 2\dot{x}_0^{-1}H_д(z)}, \qquad (13)$$

причем знаменатель ПФ $H_з(z)$ – характеристический полином (ХП) ДЦ

$$P(z) = \dot{x}_0 - 2H_д(z) = 0. \qquad (14)$$

Если корни z_k ХП (14) по модулю не превосходят единицы:

$$|z_k| \le 1, \qquad (15)$$

то АК, описываемые (11), (13) и, следовательно, (3), (5), являются устойчивыми, поскольку (даже в общем случае ЛЧ высокого порядка) решение (13) для вариации будет

$$x_\xi(nT) = \left(\sum D_k z_k^n \varepsilon\right) \le \beta(\varepsilon), \qquad (16)$$

причем коэффициенты D_k определяются по разложению (13) корнями (14), (15). При этом вид (16) соответствует условию устойчивости по Ляпунову (2).

Скорость $\dot{x}_0 = \dot{x}(0^-) = \dot{x}(T^-)$ для формул (13), (14) определяется из найденного описания АК (5) в интервале $0 < t < T$:

$$\dot{x}(T^-) = \dot{x}_1(T^-) =$$
$$= -ke^{-T} + A_1e^{-T} + 2ke^{-T+t_1} = \dot{x}(0^-) = \dot{x}_0, \qquad (17)$$

причем в (17) $A_1 = -\sigma_1$ согласно (6).

Уточнение импульсной характеристики ДЦ. Найдем ПФ и ИХ ДЦ, которые используются в (11), (13) эквивалентного описания ЛЧ РЦ. Как указано ранее, соответствие ИХ при переходе от аналоговой цепи к ДЦ имеет в методе "*МТ*" (в сравнении с методом "*M*τ" в [2], [5]) ряд особенностей.

При анализе устойчивости на интервале периода T необходимо учитывать переключение РЭ при $t = t_1$.

Как показано в [5], при указанном переходе к ИХ ДЦ необходимо исключить значение ИХ при $t = 0$. В результате скорректированную ИХ ДЦ $h_д(nT)$ следует записать в виде:

$$h_д(nT) = h(T) - h(T - t_1) -$$
$$-h(0)\delta_0(nT) + h(0 - t_1)\delta_0(nT). \qquad (18)$$

Необходимые в (18) значения ИХ $h(t)$, найденные в (12), после подстановки в (18) дают:

$$h_д(nT) = -ke^{-nT}\delta_1(nT) +$$
$$+ke^{t_1}e^{-nT}\delta_1(nT) + k\delta_0(nT) - ke^{t_1}\delta_0(nT) \div$$
$$\div H_д(z) = k\left(1 - e^{t_1}\right) - k\frac{z\left(1 - e^{t_1}\right)}{z - e^{-T}}, \qquad (19)$$

причем $H_д(z)$ в (19) – это искомая ПФ ДЦ.

Анализ устойчивости несимметричных АК. Необходимые зависимости (19) и (17) для расчета (13), (14) получены. Поэтому ХП (14) замкнутой ДЦ имеет вид

$$P(z) = \dot{x}_0 - 2H_д(z) =$$
$$= \left(-ke^{-T} - \sigma_1e^{-T} + 2ke^{-T+t_1}\right) -$$
$$-2k\left(1 - e^{t_1}\right) + 2k\frac{z\left(1 - e^{t_1}\right)}{z - e^{-T}} = 0, \qquad (20)$$

причем в (20) согласно (6) $\sigma_1 = k\dfrac{z\left(1 - 2e^{t_1} + e^T\right)}{1 - e^T}$.

Используя (20), проанализируем устойчивость АК в рассмотренных примерах.

Пример 1. Для случая $k = 4$; $\sigma_1 = 3$; $\sigma_2 = 1$; $e^T = 4.2$; $e^{t_1} = 1.4$ получим из (17) $\dot{x}_0 = 1$, а из (19)

$$H_{ДЦ}(z) = 1.6/\left[4.2(z - 1/4.2)\right].$$

Тогда ХП (20)

$$P(z) = 1 - 3.2/\left[4.2(z - 1/4.2)\right] = 0,$$

откуда $z - 1 = 0$, т. е. корень ХП $z_1 = 1$.

Пример 2. В случае $k = 4$; $\sigma_1 = 2$; $\sigma_2 = -1$; $e^T = 5$; $e^{t_1} = 2$ имеем $\dot{x}_0 = 2$;

$$H_{ДЦ}(z) = 0.8/(z - 0.2).$$

Следовательно, ХП

$$P(z) = 2 - 1.6/(z - 0.2) = 0,$$

откуда $z - 1 = 0$, т. е. корень ХП $z_1 = 1$.

Полученный корень ХП $z_1 = 1$ полностью отвечает в соответствии с (16) физической картине повторяемости АК через период T и свидетельствует об устойчивости АК по Ляпунову [2].

Этот же результат может быть найден непосредственно из (20) в общем случае с учетом (6). Обозначив $e^T = a$, $e^{t_1} = b$ и сократив k, получим:

$$P(z)=\frac{1}{a}\left(-1+\frac{1-2b+a}{1-a}\right)-2(1-b)+2z\frac{1-b}{z-1/a}=0.$$

После преобразований имеем

$$P(z)=\frac{1}{1-a}-1+\frac{z}{z-1/a}=0$$

и, окончательно,

$$P(z)=\frac{1-z}{a(z-1/a)(1-1/a)}=0.$$

Отсюда корень ХП $z_1=1$, что совпадает с результатом, полученным в [6] методом "*МТ*". Однако в [6] ИХ, соответствующая (2), полагалась непрерывной, что существенно отличается от рассмотренного в настоящей статье более сложного случая, когда ИХ (12) является разрывной.

Таким образом, предложенная методика расчета АК позволила установить наличие несимметричных АК вида (5), получить их аналитическое описание, а также строго проанализировать и доказать их устойчивость, и этим подтвердить правомерность разрабатываемого метода анализа устойчивости также для случая несимметричных АК в РЦ, что невозможно было сделать методами, описанными в [2], [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернышёв Э. П., Мясоедов Г. Б., Ружников В. А. Метод точного расчета автоколебаний в электрических цепях, содержащих нелинейные элементы с релейной гистерезисной характеристикой // Изв. вузов. Электромеханика. 1987. № 11. С.125–127.

2. Ружников В. А., Силина М. В., Чернышёв Э. П. Особенности проектирования устойчивых моделей автоколебательных радиоэлектронных и электротехнических систем // 5-й Междунар. симп. по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии, 16–19 сент. 2003, г. Санкт-Петербург. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2003. С. 250–253. (Сб. науч. докл.)

3. Цыпкин Я. З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974. 576 с.

4. Бычков Ю. А., Золотницкий В. М., Чернышёв Э. П. Основы теории электрических цепей. СПб.: Лань, 2002. 464 с.

5. Ружников В. А., Соклакова М. В., Чернышёв Э. П. Особенности применения теории дискретных цепей при исследовании устойчивости автоколебаний в релейных электрорадиоэлектронных системах // 8-й Междунар. симп. по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии, 16–19 июня 2009, г. Санкт-Петербург. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2009. С. 283–286. (Сб. науч. докл.)

6. Силина А. Г., Соклакова М. В.,Чернышёв Э. П. К разработке аналитических методов оценки устойчивости функционирования релейных автоколебательных электрорадиоэлектронных систем // 9-й Междунар. симп. по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии, 13–16 сент. 2011, г. Санкт-Петербург. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2011. С. 329–332. (Сб. науч. докл.)

A. G. Silina, M. V. Soklakova, E. P. Chernishev
Saint-Petersburg state electrotechnical university "LETI"

Features analytical assessment stability of the self-oscillations asymmetric hysteresis relay system with a low pass filter

Asymmetric self-oscillations in relay circuits with low pass filters in the feedback circuit are considered. Bases of the new calculation method of auto-oscillations are given.

Relay system, self-oscillations, the transitive characteristic, stability, transfer function, discrete circuits

Статья поступила в редакцию 25 марта 2014 г.