

Г. С. Нахмансон, С. В. Козлов  
Воронежский государственный университет

## Обнаружение фазоманипулированного широкополосного сигнала с квадратурной фазовой модуляцией в условиях взаимных помех и внутренних шумов аппаратуры

*Рассмотрен прием фазоманипулированных широкополосных сигналов с квадратурной фазовой модуляцией в условиях помех, обусловленных многостанционным доступом, и шумов аппаратуры. Получены аналитические выражения для вероятности правильного обнаружения при приеме сигналов со случайными начальными фазами и амплитудами, содержащими регулярные и флуктуационные составляющие. Проведен анализ зависимостей вероятностей правильного обнаружения сигналов от отношений "сигнал/шум" и "помеха/шум", количества мешающих сигналов, вероятности ложной тревоги.*

### Широкополосный сигнал, квадратурная фазовая манипуляция, взаимные помехи, отношение "сигнал/шум", вероятность правильного обнаружения

В современных системах радиосвязи (СРС) широкое применение находят фазоманипулированные широкополосные сигналы (ФМШПС), у которых расширение спектра осуществляется при помощи квадратурной фазовой модуляции, осуществляемой псевдослучайными последовательностями (ПСП). Несмотря на большое количество работ, посвященных исследованию СРС с ФМШПС (см., например, [1]–[6] и др.), до настоящего времени вопросам работы таких систем в условиях взаимных помех, создаваемых сигналами однопольных СРС, имеющих различные расширяющие спектр ПСП, уделено недостаточное внимание.

Для выделения полезной информации при приеме ФМШПС необходимо знать моменты времени начала периодически повторяющихся модулирующих ПСП. Эти моменты определяются при помощи процедуры обнаружения ФМШПС. При отсутствии точных сведений о моменте приема начала ПСП задача выделения полезной информации усложняется и заключается в определении значения корреляции принятого сигнала с его копиями, сдвинутыми во времени на интервалы, соответствующие области высокой корреляции между принимаемым и опорными сигналами, не превышающей длительности половины элементарного импульса ПСП. Для реализации указанного алгоритма при больших периодах ПСП и значительных неопределенностях по времени задержки принимаемого ФМШПС приемная система должна содержать большое количество параллельных каналов обработки. Формируемые на выходах каналов обработки сигналы, пропорциональные зна-

чениям функции корреляции принимаемого и опорных сигналов, сравниваются с порогом в выходных пороговых устройствах. При срабатывании порогового устройства в канале, в котором выполняется условие высокой корреляции между принимаемым и опорным сигналами, в качестве момента начала ПСП принимаемого сигнала (его времени задержки) выбирается момент начала периода ПСП опорного сигнала в данном канале. Следовательно, получение и анализ характеристик обнаружения ФМШПС с квадратурной фазовой модуляцией ПСП с неизвестным временным положением внутри канала обработки в условиях взаимных помех при различных априорных сведениях о параметрах принимаемых сигналов и помех представляют практический интерес.

**Постановка задачи.** Для формирования ФМШПС с квадратурной фазовой модуляцией в настоящее время широко применяется схема с последовательно-параллельным преобразователем ППП информационной последовательности (рис. 1) [3], [5]. Информационная последовательность  $d(t)$  с символами, принимающими значения  $\pm 1$ , преобразуется в две параллельные информационные последовательности  $d_1(t)$  и  $d_2(t)$ , символы которых принимают значения  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 0$ , если  $d = 1$ , и  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = 1$ , если  $d = -1$ . Информационные импульсы длительностью  $T$  с амплитудами, определяемыми значениями элементов  $d_1$  и  $d_2$ , умножаются на расширяющие их спектры функции  $p_{10}(t)$  и  $p_{20}(t)$ , вырабатываемые

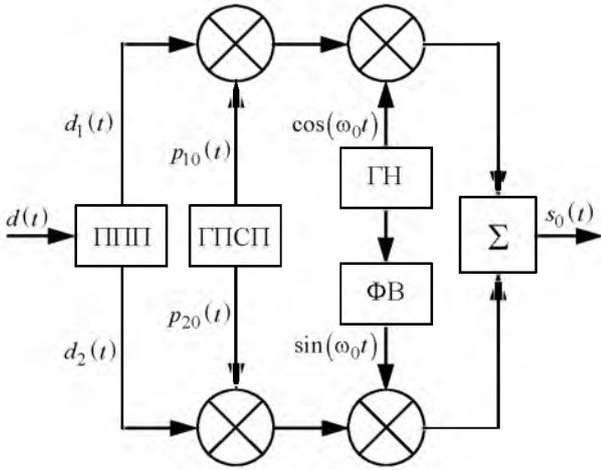


Рис. 1

генератором ПСП ГПСП, и модулируют по амплитуде высокочастотные колебания  $\cos(\omega_0 t)$  и  $\sin(\omega_0 t)$  соответственно, создаваемые генератором несущего колебания ГН и фазовращателем ФВ на  $\pi/2$ .

Модулированные высокочастотные колебания поступают на вход сумматора  $\Sigma$ , формирующего ФМШПС с квадратурной фазовой модуляцией (КФМ)

$$s_0(t) = d_1(t) p_{10}(t) \cos(\omega_0 t) + d_2(t) p_{20}(t) \sin(\omega_0 t).$$

Расширяющие спектры информационных импульсов функции

$$p_{10}(t) = \sum_{k=1}^L p_{10_k} \text{rect}[t - (k-1)\tau_{\text{и}}]$$

$$\text{и } p_{20}(t) = \sum_{k=1}^L p_{20_k} \text{rect}[t - (k-1)\tau_{\text{и}}]$$

представляют непрерывные последовательности  $L$  элементарных импульсов прямоугольной формы

$$\text{rect}[t - (k-1)\tau_{\text{и}}] = \begin{cases} 1, & (k-1)\tau_{\text{и}} < t < k\tau_{\text{и}}; \\ 0, & t < (k-1)\tau_{\text{и}}, t > k\tau_{\text{и}}, \end{cases} \quad (1)$$

отличных от нуля на временном интервале длительностью  $\tau_{\text{и}}$ . Коэффициенты  $p_{10_k}$  и  $p_{20_k}$ , принимающие значения  $\pm 1$ , образуют для каждой из функций псевдослучайные последовательности (ПСП)  $\{p_{10_k}\}$ ,  $\{p_{20_k}\}$ ,  $k = \overline{1, L}$ , определяющие законы фазовой модуляции квадратурных составляющих полезного сигнала. Расширяющие спектр функции имеют одинаковые корреляционные функции (КФ)

$$R(\tau) = \langle p_{10}(t) p_{10}(t - \tau) \rangle = \langle p_{20}(t) p_{20}(t - \tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p_{10}(t) p_{10}(t - \tau) dt = \frac{1}{T} \int_0^T p_{20}(t) p_{20}(t - \tau) dt = \begin{cases} 1 - |\tau|/\tau_{\text{и}}, & |\tau| < \tau_{\text{и}}; \\ \leq 1/L, & |\tau| \geq \tau_{\text{и}}, \end{cases}$$

но не коррелируют между собой [5]:

$$\langle p_{10}(t) p_{20}(t - \tau) \rangle = 0$$

(угловые скобки обозначают статистическое усреднение).

Пусть на вход приемника поступает аддитивная смесь

$$x(t) = s(t - \tau) + s_{\text{вз}}(t) + n(t), \quad (2)$$

где  $s(t - \tau)$  – полезный сигнал  $s(t)$ , имеющий задержку  $\tau \leq \tau_{\text{и}}$ ;  $s_{\text{вз}}(t)$  – совокупность сигналов от  $K$  мешающих однопериодных СПС рассматриваемых как взаимные помехи;  $n(t)$  – внутренние шумы аппаратуры.

Полезный сигнал имеет вид

$$s(t) = ad_1(t) p_{10}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + ad_2(t) p_{20}(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где  $a$ ,  $\varphi_0$  – случайные амплитуда и начальная фаза соответственно.

Взаимные помехи записываются в виде

$$s_{\text{вз}}(t) = \sum_{i=1}^K \left\{ a_i d_{1i}(t - \tau_i) p_{1i}(t - \tau_i) \cos[\omega_0(t - \tau_i) + \varphi_i] + a_i d_{2i}(t - \tau_i) p_{2i}(t - \tau_i) \sin[\omega_0(t - \tau_i) + \varphi_i] \right\},$$

где  $i = \overline{1, K}$  – номер мешающего сигнала;  $a_i$ ,  $\varphi_i$  – амплитуда и начальная фаза  $i$ -го мешающего сигнала соответственно;  $d_{1i}(t)$ ,  $d_{2i}(t)$  – двоичные информационные символы  $i$ -го помехового сигнала, получаемые последовательно-параллельным преобразованием его информационной последовательности  $d_i(t)$ ;  $p_{1i}(t)$ ,  $p_{2i}(t)$  – функции, расширяющие спектр  $i$ -го помехового сигнала, отличающиеся от  $p_{10}(t)$ ,  $p_{20}(t)$  коэффициентами ПСП  $\{p_{1i_k}\}$ ,  $\{p_{2i_k}\}$  соответственно;  $\tau_i < T$  – время задержки  $i$ -го помехового сигнала относительно  $s(t)$ .

Шумы аппаратуры аппроксимируются "белым" гауссовским шумом с нулевым средним значением, спектральной плотностью  $N_0$  и функцией корреляции  $\langle n(t_1), n(t_2) \rangle = (N_0/2)\delta(t_1 - t_2)$ , где  $\delta(t_1 - t_2)$  – дельта-функция.

В дальнейшем предполагается, что совместные распределения амплитуд и начальных фаз полезного и помеховых сигналов подчиняются распределению [7]:

$$W(\mathbf{a}, \Phi) = \frac{a}{2\pi\sigma_a^2} \exp\left(-\frac{a^2 + a_0^2 - 2aa_0 \cos \varphi_0}{2\sigma_a^2}\right) \times \prod_{i=1}^K \frac{a_i}{2\pi\sigma_{ai}^2} \exp\left(-\frac{a_i^2 + a_{0i}^2 - 2a_i a_{0i} \cos \varphi_i}{2\sigma_{ai}^2}\right), \quad (3)$$

где  $\mathbf{a} = \{a, \dots, a_i, \dots, a_K\}$ ,  $a_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1, K}$  – амплитуды полезного и помеховых сигналов, содержащие регулярные составляющие  $a_0$ ,  $a_{0i}$  и флуктуирующие составляющие с дисперсиями  $\sigma_a^2$ ,  $\sigma_{ai}^2$ ;  $\Phi = \{\varphi_0, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_K\}$ ,  $0 < \varphi_i < 2\pi$ ,  $i = \overline{1, K}$  – случайные начальные фазы, распределенные на интервале  $[0, 2\pi]$ .

При  $a_0 = 0$ ,  $a_{0i} = 0$ ,  $i = \overline{1, K}$ , распределение (3) хорошо описывает фединги в СРС, при которых значения амплитуд удовлетворяют плотности распределения вероятностей Рэля, а случайные начальные фазы распределены равномерно [7]. Значения  $\sigma_a^2 = 0$ ,  $\sigma_{ai}^2 = 0$ ,  $i = \overline{1, K}$ , соответствуют случаю детерминированных амплитуд принимаемых сигналов.

Прием ФМШПС с КФМ в канале обнаружения СРС осуществляет приемник, выходной эффект которого пропорционален величине

$$M(T) =$$

$$= \left\{ \int_0^T x(t) [p_{10}(t) \cos(\omega_0 t) + p_{20}(t) \sin(\omega_0 t)] dt \right\}^2 + \left\{ \int_0^T x(t) [-p_{10}(t) \sin(\omega_0 t) + p_{20}(t) \cos(\omega_0 t)] dt \right\}^2. \quad (4)$$

В соответствии с (4) и структурной схемой приемника (рис. 2) принимаемая аддитивная смесь  $x(t)$  после прохождения широкополосного фильтра ШПФ поступает в квадратурные каналы, в которых перемножается с опорными напряжениями  $p_{10}(t)$  и  $p_{20}(t)$ , вырабатываемыми ГПСЦ, а затем – с высокочастотными колебаниями  $\cos(\omega_0 t)$  и  $\sin(\omega_0 t)$ , формируемыми ГН и ФВ на  $\pi/2$ . Продукты произведений подаются на суммирующее и на вычитающее устройства. Напряжения с выходов этих устройств интегрируются в течение времени  $T$ , возводятся в квадрат и суммируются, образуя выходной эффект  $M(T)$ .

Подставив (1) в (2) и проведя интегрирование, получим

$$M(T) = \left\{ \frac{a_0 T}{2} K(\tau) (d_1 + d_2) \cos \varphi_0 + \sum_{i=1}^K \left[ \frac{a_i T}{2} (d_{1i} + d_{2i}) \rho_i(\tau_i) \cos(\varphi_i - \omega_0 \tau_i) \right] + N_{c1} + N_{s2} \right\}^2 + \left\{ \frac{a_0 T}{2} K(\tau) (d_1 + d_2) \sin \varphi_0 + \sum_{i=1}^K \left[ \frac{a_i T}{2} (d_{1i} + d_{2i}) \rho_i(\tau_i) \sin(\varphi_i - \omega_0 \tau_i) \right] + N_{c2} + N_{s1} \right\}^2, \quad (5)$$

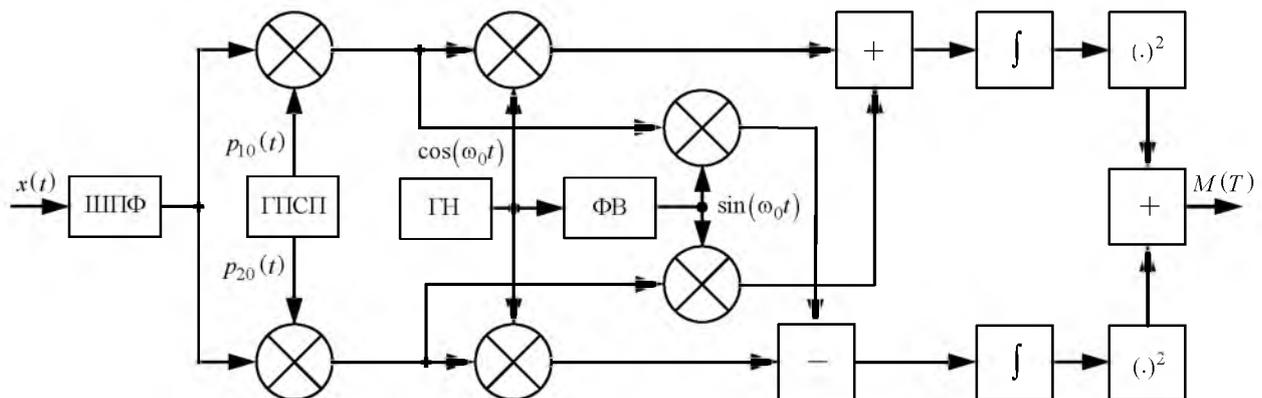


Рис. 2

где

$$\begin{aligned} \rho_i(\tau_i) &= \frac{1}{T} \int_0^T p_{10}(t) p_{1i}(t - \tau_i) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T p_{20}(t) p_{2i}(t - \tau_i) dt \end{aligned} \quad (6)$$

– взаимно корреляционная функция (ВКФ) расширяющих спектр функций одного семейства ПСП полезного и  $i$ -го мешающего сигналов;

$$\left. \begin{matrix} N_{sq} \\ N_{cq} \end{matrix} \right\} = \int_0^T p_{q0}(t) \begin{cases} \sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \end{cases} dt, \quad q = 1, 2,$$

– шумовые составляющие на выходах интеграторов квадратурных каналов, представляющие нормальные некоррелированные между собой случайные величины с нулевыми средними значениями и с дисперсиями  $\sigma_{\Pi}^2 = N_0 T / 4$ .

Значения ВКФ (6) при нулевой задержке  $\rho_i(0) = \rho_i = 1/\sqrt{L}$ . Функции взаимной корреляции между двумя различными семействами ПСП полагаются много меньшими по сравнению с функциями корреляции внутри одного семейства [5]:

$$\frac{1}{T} \int_0^T p_{10}(t) p_{2i}(t - \tau_i) dt \sim 0.$$

Так как  $d_1 + d_2 \equiv 1$  и  $d_{1i} + d_{2i} = 1$ ,  $i = \overline{1, K}$ , (5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} M(T) &= \left\{ \frac{a_0 T}{2} K(\tau) \cos \varphi_0 + \right. \\ &+ \sum_{i=1}^K \left[ \frac{a_i T}{2} \rho_i(\tau_i) \cos(\varphi_i - \omega_0 \tau_i) \right] + \\ &+ N_{c1} + N_{s2} \left. \right\}^2 + \left\{ \frac{a_0 T}{2} K(\tau) \sin \varphi_0 + \right. \\ &+ \sum_{i=1}^K \left[ \frac{a_i T}{2} \rho_i(\tau_i) \cos(\varphi_i - \omega_0 \tau_i) \right] + \\ &+ N_{c1} + N_{s2} \left. \right\}^2. \end{aligned}$$

Как известно [3], [4], [7], эффективность обнаружения сигналов характеризуется вероятностью правильного обнаружения

$$D = \int_{M_{\text{пор}}}^{\infty} W_1(M) dM, \quad (7)$$

где  $W_1(M)$  – плотность распределения выходного эффекта приемника  $M$  при наличии полезного

сигнала на его входе. Порог  $M_{\text{пор}}$  определяется исходя из заданной вероятности ложной тревоги

$$F = \int_{M_{\text{пор}}}^{\infty} W_0(M) dM, \quad \text{где } W_0(M) \text{ – плотность}$$

распределения величины  $M$  при отсутствии на входе приемника принимаемого сигнала.

**Выражения для вероятностей правильного обнаружения и ложной тревоги.** Для нахождения плотностей распределения значений выходного эффекта  $W_1(M)$  и  $W_0(M)$  воспользуемся методом характеристической функции. В рассматриваемом случае характеристическая функция определяется как [7]:

$$\theta(u) = \langle \exp(juM) \rangle_{\mathbf{a}, \boldsymbol{\varphi}, N_{c1}, N_{s1}, N_{c2}, N_{s2}},$$

где статистическое усреднение проводится по амплитудам  $\mathbf{a}$  и начальным фазам  $\boldsymbol{\varphi}$  полезного и помеховых сигналов, а также по шумовым составляющим  $N_{c1}$ ,  $N_{s1}$ ,  $N_{c2}$ ,  $N_{s2}$ . В результате, выражение для характеристической функции можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta(u) &= \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} da \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} W(\mathbf{a}, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{\varphi} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} W(N_{c1}) dN_{c1} \int_{-\infty}^{\infty} W(N_{s1}) dN_{s1} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} W(N_{c2}) dN_{c2} \int_{-\infty}^{\infty} W(N_{s2}) dN_{s2} e^{juM}. \end{aligned}$$

Выполнив громоздкие, но относительно несложные преобразования, получим:

$$\theta(u) = \frac{1}{1 - 2juA} \exp \left( \frac{j u \left[ a_0 K(\tau) + \sum_{i=1}^K a_{0i} \rho_i \right]^2}{1 - 2juA} \right), \quad (8)$$

$$\text{где } A = 2\sigma_{\Pi}^2 + T^2 \left[ \sigma_a^2 K^2(\tau) + \sum_{i=1}^K \sigma_{ai}^2 \rho_i^2 \right] / 4.$$

Для дальнейшего анализа введем следующие величины:

$$- Q_{\varphi 0} = \sigma_a^2 T / N_0 \text{ – отношение "сигнал/шум"}$$

для флуктуационной составляющей полезного сигнала;

$$- Q_{\varphi i} = \sigma_{ai}^2 T / N_0, \quad i = \overline{1, K}, \text{ – отношение "по-}$$

меха/шум" для флуктуационной составляющей  $i$ -го помехового сигнала;

–  $\gamma = a_0/\sigma_a$ ,  $\gamma_i = a_{0i}/\sigma_{ai}$ ,  $i = \overline{1, K}$ , – отношения регулярных составляющих амплитуд к среднеквадратическим значениям их флуктуационных составляющих для полезного и для  $i$ -го помехового сигналов соответственно.

Плотность распределения вероятностей значений выходного эффекта приемника через характеристическую функцию определяется как [7]:

$$W_1(M) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u) \exp(juM) du.$$

Тогда с учетом введенных обозначений имеем:

$$W_1(M) = \frac{1}{2\sigma_{\Pi}^2 \left( 2 + Q_{\Phi 0} K^2(\tau) + \sum_{i=1}^K Q_{\Phi i} \rho_i^2 \right)} \times \exp \left\{ \frac{\frac{M}{\sigma_{\Pi}^2} + \left[ \gamma \sqrt{Q_{\Phi 0}} K(\tau) + \sum_{i=1}^K \sqrt{Q_{\Phi i}} \rho_i \gamma_i \right]^2}{2 \left( 2 + Q_{\Phi 0} K^2(\tau) + \sum_{i=1}^K \sqrt{Q_{\Phi i}} \rho_i^2 \right)}} \right\} \times I_0 \left( \frac{\sqrt{M} \left[ \gamma \sqrt{Q_{\Phi 0}} K(\tau) + \sum_{i=1}^K \sqrt{Q_{\Phi i}} \rho_i \gamma_i \right]}{\sigma_{\Pi}^2 \left( 2 + Q_{\Phi 0} K^2(\tau) + \sum_{i=1}^K Q_{\Phi i} \rho_i^2 \right)} \right), \quad (9)$$

где  $I_0(\cdot)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента [8].

Выражение для вероятности правильного обнаружения ФМШПС, принимаемого в условиях взаимных помех и внутренних шумов аппаратуры, на основании (7), (9) получим в виде

$$D = \frac{1}{2 \left( 2 + Q_{\Phi 0} K^2(\tau) + \sum_{i=1}^K Q_{\Phi i} \rho_i^2 \right)} \times \int_{\hat{M}_{\text{пор}}}^{\infty} \exp \left\{ \frac{\hat{M} + \left[ \gamma \sqrt{Q_{\Phi 0}} K(\tau) + \sum_{i=1}^K \sqrt{Q_{\Phi i}} \rho_i \gamma_i \right]^2}{2 \left( 2 + Q_{\Phi 0} K^2(\tau) + \sum_{i=1}^K Q_{\Phi i} \rho_i^2 \right)}} \right\} \times I_0 \left( \frac{\sqrt{\hat{M}} \left[ \gamma \sqrt{Q_{\Phi 0}} K(\tau) + \sum_{i=1}^K \sqrt{Q_{\Phi i}} \rho_i \gamma_i \right]}{2 + Q_{\Phi 0} K^2(\tau) + \sum_{i=1}^K Q_{\Phi i} \rho_i^2} \right) d\hat{M}, \quad (10)$$

где  $\hat{M} = M/\sigma_{\Pi}^2$ ,  $\hat{M}_{\text{пор}} = M_{\text{пор}}/\sigma_{\Pi}^2$  – выходной эффект и порог, нормированные на мощность шумовых составляющих на выходе линейной части квадратурных каналов.

Вероятность ложной тревоги определим из (8), положив полезный сигнал на входе приемника равным нулю ( $a_0 = 0$ ,  $\sigma_a = 0$ ):

$$F = \frac{1}{2 \left( 2 + \sum_{i=1}^K Q_{\Phi i} \rho_i^2 \right)} \times \int_{\hat{M}_{\text{пор}}}^{\infty} \exp \left\{ \frac{\hat{M} + \left( \sum_{i=1}^K \sqrt{Q_{\Phi i}} \rho_i \gamma_i \right)^2}{2 \left( 2 + \sum_{i=1}^K Q_{\Phi i} \rho_i^2 \right)}} \right\} \times I_0 \left( \frac{\hat{M} + \left( \sum_{i=1}^K \sqrt{Q_{\Phi i}} \rho_i \gamma_i \right)}{2 \left( 2 + \sum_{i=1}^K Q_{\Phi i} \rho_i^2 \right)} \right) d\hat{M}. \quad (11)$$

Введем усредненные мощности для регулярных и для флуктуационных составляющих помех:

$$a_{0\Pi}^2 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K a_{0i}^2; \quad \sigma_{a\Pi}^2 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \sigma_{ai}^2$$

и усредненные отношения "помеха/шум" для указанных составляющих:

$$Q_{\Pi} = a_{\Pi}^2 T / N_0; \quad Q_{\Phi \Pi} = \sigma_{a\Pi}^2 T / N_0,$$

а также  $\gamma_{\Pi} = a_{\Pi} / \sigma_{a\Pi}$ .

Рассмотрим случай наиболее сильного воздействия помех [4], [5], возникающий при отсутствии задержек помеховых сигналов относительно опорных сигналов:  $\tau_i = 0$ ,  $i = \overline{1, K}$ . Тогда  $\rho_i = 1/\sqrt{L}$ ,  $i = \overline{1, K}$ . Обозначив

$$A_D = \gamma K(\tau) \sqrt{Q_{\Phi 0}} + \gamma_{\Pi} \sqrt{K/L} \sqrt{Q_{\Phi \Pi}};$$

$$A_F = \gamma_{\Pi} \sqrt{K/L} \sqrt{Q_{\Phi \Pi}};$$

$$B_D = 2 + K^2(\tau) Q_{\Phi 0} + (K/L) Q_{\Phi \Pi};$$

$$B_F = 2 + (K/L) Q_{\Phi \Pi},$$

с учетом (10) и (11) получим:

$$D = \frac{1}{2B_D} \int_{\hat{M}_{\text{пор}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\hat{M} + A_D^2}{2B_D}\right) I_0\left(\frac{\sqrt{\hat{M}}A_D}{B_D}\right) d\hat{M}; \quad (12)$$

$$F = \frac{1}{2B_F} \int_{\hat{M}_{\text{пор}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\hat{M} + A_F^2}{2B_F}\right) I_0\left(\frac{\sqrt{\hat{M}}A_F}{B_F}\right) d\hat{M}.$$

Используя  $Q$ -функцию Маркума 1-го рода [3]:

$$Q_1(\xi, \varsigma) = \int_{\varsigma}^{\infty} z \exp\left[-(z^2 + \xi^2)/2\right] I_0(z\xi) dz,$$

выражения (12) представим в виде

$$D = Q_1\left(A_D/\sqrt{B_D}, \sqrt{\hat{M}}/\sqrt{B_D}\right);$$

$$F = Q_1\left(A_F/\sqrt{B_F}, \sqrt{\hat{M}}/\sqrt{B_F}\right).$$

Полученные выражения для вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги ФМШПС с КФМ (12) справедливы в общем случае, когда амплитуды принимаемых сигналов содержат как регулярные, так и флуктуационные составляющие. Рассмотрим несколько частных случаев.

**Выражения для вероятностей правильного обнаружения и ложной тревоги при преобладании регулярных составляющих в амплитудах сигналов.** Рассмотрим случай  $\gamma \gg 1$ ,  $\gamma_{\Pi} \gg 1$ . Заметим, что при  $x \gg 1$  [8]

$$I_0(\xi) \approx \exp \xi / \sqrt{2\pi\xi}. \quad (13)$$

Подставив (13) в (12) с учетом того, что, как показано в [7], при  $\gamma \gg 1$

$$\frac{\xi}{\sqrt{2\pi\xi\varsigma}} \exp\left[-\frac{(\xi-\varsigma)^2}{2}\right] \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\xi-\varsigma)^2}{2}\right],$$

$$-\infty < \xi < \infty,$$

выражения для вероятностей правильного обнаружения и ложной тревоги (12) можно привести к виду

$$D \approx \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{\sqrt{\hat{M}_{\text{пор}}} - A_D}{\sqrt{2B_D}} \right);$$

$$F \approx \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{\sqrt{\hat{M}_{\text{пор}}} - A_F}{\sqrt{2B_F}} \right),$$

где  $\operatorname{erf} \xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-t^2} dt$  – интеграл ошибок [8].

Если амплитуды принимаемых сигналов детерминированы, то  $\sigma_a^2 = \sigma_{a\Pi}^2 = 0$ ,  $Q_{\Phi 0} = Q_{\Phi \Pi} = 0$  и выражения для  $A_D$ ,  $B_D$ ,  $A_F$ ,  $B_F$  имеют вид

$$A_D = K(\tau)\sqrt{Q_0} + \sqrt{K/L}\sqrt{Q_{\Pi}}; \quad A_F = \sqrt{K/L}\sqrt{Q_{\Pi}};$$

$$B_D = 2 + K^2(\tau)Q_0 + Q_{\Pi}K/L; \quad B_F = 2 + Q_{\Pi}K/L,$$

где  $Q_0 = a_0^2 T / N_0$  – отношение "сигнал/шум" для регулярной составляющей сигнала.

В результате, выражения для вероятностей правильного обнаружения и ложной тревоги примут вид

$$D \approx \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \frac{\sqrt{\hat{M}_{\text{пор}}} - K(\tau)\sqrt{Q_0} + \sqrt{K/L}\sqrt{Q_{\Pi}}}{\sqrt{2[2 + K^2(\tau)Q_0 + (K/L)Q_{\Pi}]}} \right]; \quad (14)$$

$$F \approx \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \frac{\sqrt{\hat{M}_{\text{пор}}} - \sqrt{K/L}\sqrt{Q_{\Pi}}}{\sqrt{2[2 + (K/L)Q_{\Pi}]}} \right].$$

В настоящее время в СРС широко применяются ФМШПС с большими базами, для которых обычно  $h = \sqrt{K/L} \ll 1$ . Тогда, разложив (14) в ряды по  $h$  и сохранив два первых члена, получим

$$D \approx \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{\sqrt{\hat{M}_0}}{\sqrt{2}} \right) +$$

$$+ \frac{h}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\gamma_{\Pi}\sqrt{Q_{\Phi\Pi}}}{2 + K^2(\tau)Q_{\Phi 0}} \exp\left(-\frac{\hat{M}_0}{2}\right);$$

$$F \approx \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\hat{M}_{\text{пор}}}{4}} \right) +$$

$$+ \frac{h}{4\sqrt{2\pi}} \gamma_{\Pi}\sqrt{Q_{\Phi\Pi}} \exp\left(-\frac{\hat{M}_{\text{пор}}}{4}\right),$$

$$\text{где } \sqrt{\hat{M}_0} = \frac{\sqrt{\hat{M}_{\text{пор}}} - \gamma\sqrt{Q_{\Phi 0}}K(\tau)}{\sqrt{2 + K^2(\tau)Q_{\Phi 0}}}.$$

Для малых значений вероятности ложной тревоги значение нормированного порога  $\hat{M}_{\text{пор}} \gg 1$ . Тогда, используя асимптотическое представление для интеграла ошибок при больших значениях аргумента  $\operatorname{erf} \xi \approx 1 - \exp(-\xi^2)/(\xi\sqrt{\pi})$  [8], выражение для вероятности ложной тревоги запишем в виде

$$F \approx \frac{2 + \frac{1}{4\sqrt{2}} h \gamma_{\Pi} \hat{M}_{\text{пор}} \sqrt{Q_{\Phi\Pi}}}{\sqrt{\pi \hat{M}_{\text{пор}}}} \exp\left(-\frac{\hat{M}_{\text{пор}}}{4}\right).$$

**Выражения для вероятностей правильного обнаружения и ложной тревоги при преобладании флуктуационных составляющих в амплитудах сигналов.** Если в амплитудах принимаемых сигналов преобладают флуктуационные составляющие ( $\sigma_a \gg a_0$ ,  $\sigma_{ai} \gg a_{0i}$ ,  $i = \overline{1, K}$ , и, следовательно,  $\gamma \ll 1$ ,  $\gamma_i \ll 1$ ,  $i = \overline{1, K}$ ), то, разложив функцию Бесселя в (12) в ряд и ограничившись первыми двумя членами, получим искомые выражения в виде

$$\begin{aligned} D &\approx \left( 1 + \frac{\hat{M}_{\text{пор}} A_D^2}{4B_D^2} \right) \exp \left( -\frac{\hat{M}_{\text{пор}}}{2B_D} \right); \\ F &\approx \left( 1 + \frac{\hat{M}_{\text{пор}} A_F^2}{4B_F^2} \right) \exp \left( -\frac{\hat{M}_{\text{пор}}}{2B_F} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

В (15) использованы обозначения, введенные в (12), и отброшены члены  $o(\gamma^2)$ .

Разложив выражения в (15) в ряд по  $h = \sqrt{K/L}$ , получим

$$\begin{aligned} D &\approx \left\{ 1 + \frac{\hat{M}_{\text{пор}}}{4B_0^2} K^2(\tau) Q_0 + h^2 \frac{\hat{M}_{\text{пор}}}{2B_0^2} \left[ Q_{\Phi\Pi} + \frac{Q_{\Pi}}{2} + \frac{K^2(\tau) Q_0}{4B_0^2} (\hat{M}_{\text{пор}} - 4B_0) \right] \right\} \exp \left( -\frac{\hat{M}_{\text{пор}}}{2B_0} \right); \\ F &\approx \left[ 1 + h^2 \frac{\hat{M}_{\text{пор}}}{2} \left( Q_{\Phi\Pi} + \frac{Q_{\Pi}}{2} \right) \right] \exp \left( -\frac{\hat{M}_{\text{пор}}}{2} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $B_0 = 2 + K^2(\tau) Q_{\Phi 0}$ . При выводе выражений (16) отброшены члены порядка  $o(h^2)$ .

Рассмотрим подробнее второе выражение в (16). Прологарифмировав его и учтя, что для малых значений аргумента  $\ln(1 + \xi) \approx \xi$ , определим величину нормированного порога:

$$\hat{M}_{\text{пор}} = -\frac{4 \ln F}{1 - h^2 (Q_{\Phi\Pi} + Q_{0\Pi}/2)}. \quad (17)$$

Тогда выражение для вероятности правильного обнаружения примет вид

$$\begin{aligned} D &\approx \left( 1 - \frac{C_0}{B_0} \ln F \left\{ \frac{K^2(\tau) Q_0}{2} + h^2 \left[ Q_{\Phi\Pi} + \frac{Q_{0\Pi}}{2} - \frac{K^2(\tau) Q_0}{2B_0} (C_0 \ln F + 2) \right] \right\} \right) F^{C_0}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $C_0 = \left\{ B_0 \left[ 1 - h^2 (Q_{\Phi\Pi} + Q_{0\Pi}/2) \right] \right\}^{-1}$ .

Из соотношений (16) и (17) следует, что для фиксированной вероятности ложной тревоги при преобладании у амплитуд флуктуационных составляющих значение нормированного порога  $\hat{M}_{\text{пор}}$ , соответствующее заданному уровню ложной тревоги  $F$ , зависит от усредненного отношения "помеха/шум"  $Q_{0\Pi} + Q_{\Phi\Pi}$  и отношения количества воздействующих помех к величине базы принимаемых сигналов  $h^2 = K/L$ . Значение порога возрастает с увеличением этих значений, что требует повышения отношения "сигнал/шум" для сохранения требуемой вероятности правильного обнаружения.

При отсутствии воздействующих помех выражение (18) преобразуется к виду

$$D \approx \left[ 1 - \frac{\gamma^2 Q_{\Phi 0} K^2(\tau) \ln F}{2 \left[ 2 + K^2(\tau) Q_{\Phi 0} \right]^2} \right] F^{\frac{1}{2 + K^2(\tau) Q_{\Phi 0}}}.$$

Второе слагаемое в фигурных скобках показывает вклад в увеличение вероятности правильного обнаружения появляющейся у полезного сигнала незначительной регулярной составляющей амплитуды ( $\gamma = a_0/\sigma_a \ll 1$ ).

**Обсуждение результатов.** На рис. 3–6 представлены зависимости вероятностей правильного обнаружения ФМШПС с КФМ, принимаемых на фоне шумов аппаратуры и взаимных помех как функции отношения "сигнал/шум" для флуктуационной составляющей амплитуды  $Q_{\Phi 0}$  полезного сигнала. Помехи характеризуются случайными начальными фазами и амплитудами, имеющими регулярные и флуктуационные составляющие. Зависимости получены для различного числа помеховых сигналов  $K$ , различных значений параметров, характеризующих соотношения регулярных и флуктуационных составляющих амплитуд у полезного и помеховых сигналов  $\gamma = a_0/\sigma_a = \gamma_n = a_{0\Pi}/\sigma_{a\Pi}$ , различных значений вероятности ложной тревоги и различных значений временной задержки между принимаемым и опорным сигналами. При расчетах значения баз полезного и помеховых сигналов полагались  $L = 127$ .

Кривые на рис. 3 представляют результаты, полученные для случая воздействия трех помех ( $K = 3$ ) при вероятности ложной тревоги  $F = 10^{-4}$  и различных значениях соотношений регулярных и флуктуационных составляющих амплитуд принимаемого и помеховых сигналов  $\gamma = \gamma_{\Pi}$ .

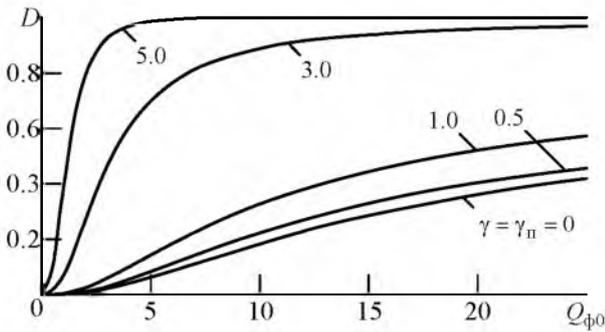


Рис. 3

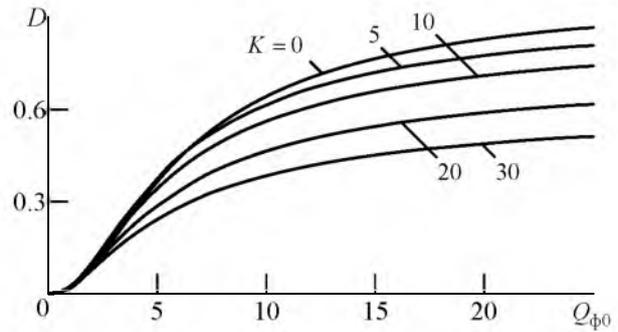


Рис. 4

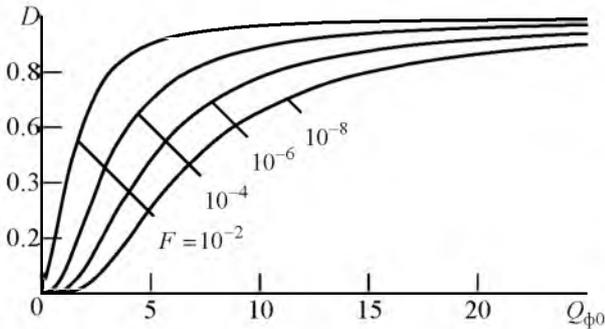


Рис. 5

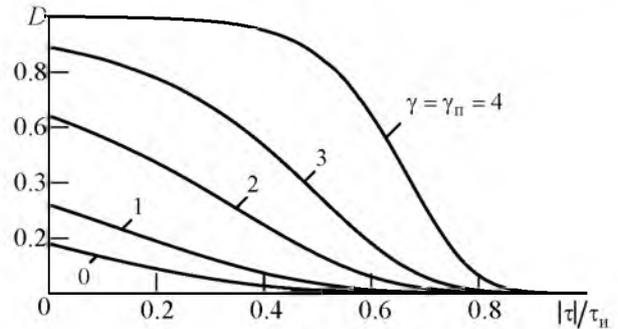


Рис. 6

Зависимости на рис. 4 для вероятностей правильного обнаружения приведены для вероятности ложной тревоги  $F = 10^{-4}$  и отношения регулярной составляющей амплитуд сигналов к среднеквадратическому значению их флуктуационных составляющих  $\gamma = \gamma_{\Pi} = 2$  при различном количестве воздействующих помех  $K$ .

Результаты расчетов вероятности правильного обнаружения при различных значениях вероятности ложной тревоги приведены на рис. 5 для количества взаимных помех  $K = 3$ . При расчетах полагалось, что отношения регулярных составляющих амплитуд сигналов к их среднеквадратическим отклонениям соответствуют  $\gamma = \gamma_{\Pi} = 3$ .

Из хода кривых на рис. 3-5 следует, что вероятности правильного обнаружения принимаемого ФМШПС возрастают с увеличением отношения "сигнал/шум" для флуктуационной составляющей амплитуды сигнала  $Q_{\phi 0}$ , а также с уменьшением количества взаимных помех, приводящим к увеличению отношения "сигнал/(помеха + внутренний шум)" на выходе линейной части приемника. Следует заметить, что значения  $D$  резко возрастают с увеличением регулярных составляющих амплитуд сигналов по отношению к их флуктуационным составляющим (т. е. с увеличением  $\gamma$  и  $\gamma_{\Pi}$  (см. рис. 3)). Последнее утверждение объясняется тем, что отношение "сигнал/шум"

$$Q = \frac{a_0^2 + \sigma_a^2}{N_0} T = (\gamma^2 + 1) Q_{\phi 0} \approx \begin{cases} Q_{\phi 0}, & \gamma \ll 1; \\ Q_0, & \gamma \gg 1 \end{cases}$$

при  $\gamma \gg 1$  возрастает с увеличением  $\gamma$  по отношению к  $Q_{\phi 0}$  пропорционально  $\gamma^2$ .

Из поведения кривых на рис. 5 видно, что при увеличении вероятности ложной тревоги за счет уменьшения уровня порога в решающем устройстве возрастает вероятность правильного обнаружения полезного сигнала при неизменных остальных параметрах.

Расчет зависимостей вероятности правильного обнаружения от временной задержки принимаемого сигнала, нормированной на длительность элементарного импульса ФМШПС  $|t|/\tau_{\Pi}$  (рис. 6), выполнен при числе воздействующих помех  $K = 3$ , вероятности ложной тревоги  $F = 10^{-4}$  и отношении "сигнал/шум" и "помеха/шум" для флуктуирующих составляющих амплитуд сигнала и помех  $Q_{\phi 0} = Q_{\phi \Pi} = 10$ . Из хода кривых на рис. 6 следует, что уменьшение регулярных составляющих амплитуд сигналов, поступающих на вход приемника, приводит к сужению интервалов временных задержек между принимаемым и опорным сигналами, при которых вероятность правильного обнаружения не опускается ниже заданного уровня. Так, для достижения  $D > 0.8$  при  $Q_{\phi 0} = Q_{\phi \Pi} = 10$  для регулярной составляющей

амплитуды сигнала должно выполняться условие  $\gamma > 3$  (т. е.  $a_0 > 3\sigma_a$ ). При этом интервал временных задержек принимаемого сигнала относительно опорного не превышает  $|\tau| < 0.6\tau_{и}$  при  $\gamma = 4$  и сужается до  $|\tau| < 0.3\tau_{и}$  при  $\gamma = 3$ .

В результате исследования, описанного в настоящей статье, получены новые аналитические соотношения для расчета характеристик обнаружения ФМШПС с КФМ в условиях взаимных помех, обусловленных многостанционным доступом, и внутренних шумов аппаратуры при случайных начальных фазах полезного и мешающих сигналов и наличии у амплитуд регулярных и флуктуационных составляющих. Соотно-

шения позволяют определять зависимости вероятностей правильного обнаружения ФМШПС с КФМ от значений баз сигналов, количества и уровня воздействующих взаимных помех, отношений "сигнал/шум" и соотношений между регулярными и флуктуирующими составляющими амплитуд принимаемых сигналов, а также от величин временных задержек принимаемого сигнала относительно опорного. Полученные результаты могут быть использованы при определении временных задержек опорных сигналов в рабочих каналах многоканальной системы обнаружения ФМШПС с КФМ для обеспечения требуемых вероятностей правильного обнаружения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ziemer R. E., Peterson R. L. Introduction to spread spectrum communications. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1995. 695 p.
2. Torreri D. J. Principles of military communication systems. Dedham MA.: Artech House Inc., 1981. 200 p.
3. Помехозащищенность систем радиосвязи с расширением спектра сигналов модуляцией несущей псевдослучайной последовательностью / под ред. В. И. Борисова. М.: Радио и связь, 2003. 640 с.
4. Варакин Л. Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Радио и связь, 1986, 384 с.
5. Персли М. Б. Расширение спектра сигналов в пакетных радиосетях // ТИИЭР. 1987. Т. 75, № 1. С. 140–162.
6. Нахмансон Г. С., Стародубцева Е. А. Вероятность ошибки оценивания информационного символа в системах радиосвязи с фазоманипулированными широкополосными сигналами в условиях взаимных помех // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58, № 2. С. 154–162.
7. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966. 678 с.
8. Двайт Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1983. 228 с.

G. S. Nakhmanson, S. V. Kozlov  
Voronezh state university

### Detection of direct-sequence spread spectrum signal with quadrature phase-shift keying in case of multiple access interference and internal Gaussian noise

*The reception of the broadband phase modulated signal with quadrature phase-shift keying in case of multiple access interference and internal Gaussian noise has been considered. New characteristics of broadband phase modulated signal with quadrature phase-shift keying detection have been obtained in case amplitudes of receiving signal and jammers have both regular and fluctuating components. Broadband phase modulated signal detection efficiency as a function of signal-to-noise ratio, signal-to-jam ratio, number of jammers and false positive probability has been analyzed.*

Broadband signal, quadrature phase manipulation, multiple users interference, signal-to-noise ratio, true positive probability  
Статья поступила в редакцию 1 апреля 2014 г.