



УДК 537.87

Г. А. Зарецкая, А. В. Дроздовский, Б. А. Калиникос
Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина)

Метод расчета собственных резонансных частот оптических резонаторов с модами шепчущей галереи¹

Предложен метод расчета собственных резонансных частот и, как следствие, области свободной дисперсии высокодобротных диэлектрических дисковых резонаторов с модами шепчущей галереи. Метод основан на применении к дисперсионному уравнению, выводимому для неограниченного по длине диэлектрического цилиндра, размерного квантования, обусловленного требованием баланса фаз для стоячих волн в резонаторе. Получены приближенные выражения, пригодные для расчета оптических микрорезонаторов, применяемых в устройствах радиофотоники.

Оптические резонаторы, моды шепчущей галереи, микрорезонаторы, радиофотоника

В последнее десятилетие интенсивно развивается новое научно-техническое направление – радиофотоника, возникшее из слияния радиоэлектроники, интегральной и волновой оптики, СВЧ-оптоэлектроники и ряда других отраслей науки и техники [1]–[3].

Одним из ключевых элементов компонентной базы радиофотоники является оптический резонатор на модах шепчущей галереи. Под модами шепчущей галереи в таких резонаторах понимаются моды с высоким азимутальным индексом, "прижатые" к поверхности резонатора и обладающие добротностью, много большей, чем моды низших типов колебаний [4], [5].

Благодаря развитию технологии такие оптические резонаторы могут обладать добротностью больше, чем 10^{11} [6], а также высокой стабильностью по отношению к внешним воздействиям. Это делает их весьма привлекательными для различных практических применений [7]–[9].

Среди осесимметричных резонаторов с модами шепчущей галереи можно выделить резонаторы нескольких основных форм: шарообразной [10]–[12], тороидальной и дисковой [13], [14], а также "бутылочной" [15]. В настоящее время получены планарные дисковые резонаторы микронной толщины, совместимые с кремниевой технологией [13], [14], [16], что открывает широкие перспективы их внедрения в уже существующее производство.

В то же время, поскольку такие резонаторы характеризуются высоким значением азимутального индекса и имеют конечные размеры по продольной оси, возникает задача определения их собственных резонансных частот и, соответственно, области свободной дисперсии.

Отметим, что существует несколько аналитических методов оценки собственных резонансных частот дисковых диэлектрических резонаторов. К ним относятся методы: частичных областей [4], эффективной диэлектрической проницаемости [17] и магнитных стенок [18]. Перечисленные методы достаточно трудоемки и требуют значительных вычислительных мощностей, так как основаны на одновременном решении двух дисперсионных уравнений, имеющих неявный вид.

В настоящей статье предложен относительно простой и достаточно точный "инженерный" метод расчета собственных резонансных частот, а также области свободной дисперсии дисковых резонаторов. В сравнении с известными [4], [17], [18] предложенный метод требует меньших вычислительных и временных затрат.

Предложенный метод расчета собственных резонансных частот включает два шага. На первом определяется дисперсионное уравнение для собственных волн, которые могут существовать в диэлектрическом цилиндре неограниченной длины, а на втором находится уравнение резонансных

¹ Работа поддержана грантом Президента РФ для ведущих научных школ № НШ-9296.2016.2.

частот для диска, получаемого ограничением длины цилиндра.

Дисперсионное уравнение для собственных волн цилиндра находится из совместного решения уравнений Максвелла и материальных уравнений с применением электродинамических граничных условий. Уравнение резонансных частот для диска получается квантованием продольного волнового вектора, входящего в дисперсионное уравнение цилиндра. При этом для определения дискретных значений продольного волнового вектора используется условие баланса фаз колебаний в диске. Задача решается для случаев "толстого" и "тонкого" диска (определения "толстого" и "тонкого" диска даны далее).

Рассмотрим математическое описание предложенного метода. Выражения для компонентов электрического E_z , E_ϕ , E_ρ и магнитного H_z , H_ϕ , H_ρ полей, полученные из уравнений Максвелла при гармонической зависимости от времени $e^{i\omega t}$, имеют вид

$$E_z = \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} Z_m(k_{\perp\rho}) e^{-i\beta z} \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix}; \quad (1)$$

$$H_z = \begin{Bmatrix} D \\ C \end{Bmatrix} Z_m(k_{\perp\rho}) e^{-i\beta z} \begin{Bmatrix} \sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{Bmatrix}; \quad (2)$$

$$H_\phi = -\frac{i}{k_{\perp}^2} \left[\begin{Bmatrix} D \\ -C \end{Bmatrix} \frac{\beta m}{\rho} Z_m(k_{\perp\rho}) + \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \varepsilon_0 \varepsilon \omega Z'_m(k_{\perp\rho}) \right] e^{-i\beta z} \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix}; \quad (3)$$

$$H_\rho = \frac{i}{k_{\perp}^2} \left[\begin{Bmatrix} -A \\ B \end{Bmatrix} \frac{m \varepsilon_0 \varepsilon \omega}{\rho} Z_m(k_{\perp\rho}) - \begin{Bmatrix} D \\ C \end{Bmatrix} \beta Z'_m(k_{\perp\rho}) \right] e^{-i\beta z} \begin{Bmatrix} \sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{Bmatrix}; \quad (4)$$

$$E_\phi = -\frac{i}{k_{\perp}^2} \left[\begin{Bmatrix} -A \\ B \end{Bmatrix} \frac{\beta m}{\rho} Z_m(k_{\perp\rho}) - \begin{Bmatrix} D \\ C \end{Bmatrix} \mu_0 \mu \omega Z_m(k_{\perp\rho}) \right] e^{-i\beta z} \begin{Bmatrix} \sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{Bmatrix}; \quad (5)$$

$$E_\rho = -\frac{i}{k_{\perp}^2} \left[\begin{Bmatrix} D \\ -C \end{Bmatrix} \frac{m \mu_0 \mu \omega}{\rho} Z_m(k_{\perp\rho}) + \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \beta Z'_m(k_{\perp\rho}) \right] e^{-i\beta z} \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix};$$

где ω – круговая частота; A, B, C, D – константы, имеющие смысл амплитуд и определяемые из граничных условий; Z_m – цилиндрическая функция, вид которой зависит от области определения полей и поставленной задачи; m – порядок ци-

линдрической функции, характеризующий количество вариаций поля по азимуту;

$$k_{\perp} = \begin{cases} k_{\perp 1}, & \rho \leq R; \\ k_{\perp 2}, & \rho > R \end{cases}$$

– поперечное волновое число; ρ – радиальная координата; β – продольное волновое число; ϕ – азимутальный угол; ε_0, μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума;

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_{\text{res}}, & \rho \leq R, \\ \varepsilon_{\text{air}}, & \rho > R \end{cases}$$

– диэлектрическая проницаемость (R – радиус резонатора); μ – относительная магнитная проницаемость материала дискового резонатора, причем

$$k_{\perp 1} = \sqrt{(\omega/c)^2 \varepsilon_{\text{res}}^2 - \beta^2}; \quad k_{\perp 2} = \sqrt{(\omega/c)^2 \varepsilon_{\text{air}}^2 - \beta^2};$$

(c – скорость света); $\varepsilon_{\text{res}}, \varepsilon_{\text{air}}$ – диэлектрические проницаемости материала резонатора и пространства, окружающего резонатор, соответственно.

Формулы (1)–(5) определяют две системы уравнений: одну при использовании верхних выражений из пар, заключенных в фигурные скобки, вторую – при использовании нижних выражений. Для расчета электромагнитного поля внутри диска может быть использована любая система.

Как было отмечено ранее, в решении поставленной задачи можно выделить два случая: "толстого" и "тонкого" диска. Под "толстым" диском будем понимать условие $\beta > k_{\text{air}}$. При этом k_{\perp} вещественно внутри и вне резонатора и стоячие волны внутри резонатора описываются функциями Бесселя: $Z_m(k_{\perp\rho}) = J_m(k_{\perp\rho})$. Вне резонатора волны в общем случае описываются функциями Ханкеля первого и второго рода:

$$Z_m(k_{\perp\rho}) = H_m^{(1)}(k_{\perp\rho}) + H_m^{(2)}(k_{\perp\rho}), \quad (6)$$

что соответствует расходящимся и приходящим сферическим волнам соответственно. При выбранной гармонической временной зависимости ($e^{i\omega t}$) в (6) следует сохранить только вторую функцию Ханкеля, которая удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда [5].

Применив граничные условия электродинамики, в случае "толстого" диска получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{m^2}{R^2} \left(\frac{\varepsilon_{\text{res}}}{k_{\perp 1}^2} - \frac{\varepsilon_{\text{air}}}{k_{\perp 2}^2} \right) \left(\frac{1}{k_{\perp 1}^2} - \frac{1}{k_{\perp 2}^2} \right) =$$

$$= \left[\frac{\varepsilon_{\text{res}} J'_m(k_{\perp 1} R)}{k_{\perp 1} J_m(k_{\perp 1} R)} + \frac{\varepsilon_{\text{air}} H'_m(k_{\perp 2} R)}{k_{\perp 2} H_m(k_{\perp 2} R)} \right] \times \left[\frac{1}{k_{\perp 1}} \frac{J'_m(k_{\perp 1} R)}{J_m(k_{\perp 1} R)} + \frac{1}{k_{\perp 2}} \frac{H'_m(k_{\perp 2} R)}{H_m(k_{\perp 2} R)} \right]. \quad (7)$$

Из (7) видно, что поперечные колебания в приближении "толстого" диска имеют гибридную структуру, т. е. в решении можно выделить HE_{ml} - и EH_{ml} -моды.

В приближении "тонкого" диска выполняется условие $k_{\text{res}} > \beta > k_{\text{air}}$. В этом случае, как и в случае "толстого" диска, стоячие волны внутри резонатора описываются функциями Бесселя. Вне резонатора k_{\perp} принимает чисто мнимые значения. Поэтому волны вне резонатора описываются модифицированными функциями Бесселя первого и второго рода. Исходя из условия равенства поля нулю на бесконечности, в качестве решения берем модифицированную функцию Бесселя второго рода – функцию Макдональда K_m . Применяв граничные условия электродинамики, в случае "тонкого" диска получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{m^2}{R^2} \left[\frac{\varepsilon_{\text{res}}}{k_{\perp 1}^2} + \frac{\varepsilon_{\text{air}}}{(ik_{\perp 2})^2} \right] \left[\frac{1}{k_{\perp 1}^2} + \frac{1}{(ik_{\perp 2})^2} \right] = \left[\frac{\varepsilon_{\text{res}} J'_m(k_{\perp 1} R)}{k_{\perp 1} J_m(k_{\perp 1} R)} + \frac{\varepsilon_{\text{air}} K'_m(ik_{\perp 2} R)}{ik_{\perp 2} K_m(ik_{\perp 2} R)} \right] \times \left[\frac{1}{k_{\perp 1}} \frac{J'_m(k_{\perp 1} R)}{J_m(k_{\perp 1} R)} + \frac{1}{ik_{\perp 2}} \frac{K'_m(ik_{\perp 2} R)}{K_m(ik_{\perp 2} R)} \right]. \quad (8)$$

Из (8) следует, что характер мод в приближении "тонкого" диска также имеет гибридную структуру, т. е. в решении можно выделить HE_{ml} - и EH_{ml} -моды. Однако при $m = 0$ моды не являются гибридными. В этом случае уравнение (9) распадается на два более простых, описывающих поперечные TE_{ml} - и TM_{ml} -моды.

Полученные дисперсионные уравнения как для "толстого" (7), так и "тонкого" (8) дисков не учитывают дискретизацию резонансных частот за счет конечной толщины резонатора. Перейдем к учету влияния толщины резонатора на спектр его частот.

Применив условие баланса фаз, определим неизвестное значение продольного волнового числа:

$$\beta = (\pi n - \varphi)/d, \quad (9)$$

где n – целое число, характеризующее количество максимумов по осевой координате; φ – подгоночный параметр, имеющий смысл фазового набег

при отражении волны от границ раздела сред², d – толщина резонатора.

Зная значения продольного волнового числа (9), из полученных дисперсионных уравнений (7) и (8) можно определить значения резонансных частот и области свободной дисперсии соответственно.

Резонансные типы колебаний диэлектрического дискового резонатора и отвечающие им частоты характеризуются тремя индексами m , l и n . Индекс m фигурирует в (7) и (8) в явном виде и характеризует количество длин волн, укладываемых по угловой координате. Индекс l отражает число вариаций поля по радиальной координате. Он определяется номером решения уравнений (7) и (8), у которых существует бесконечное множество корней. Индекс n указывает количество вариаций поля по оси диска.

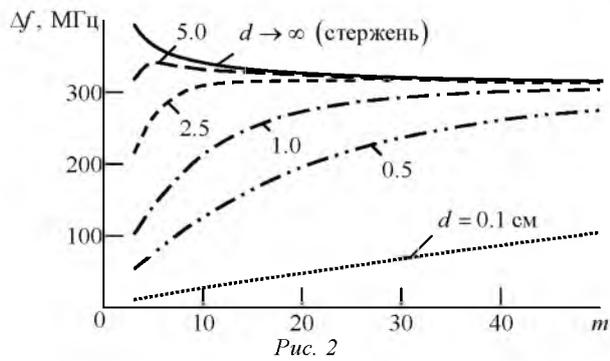
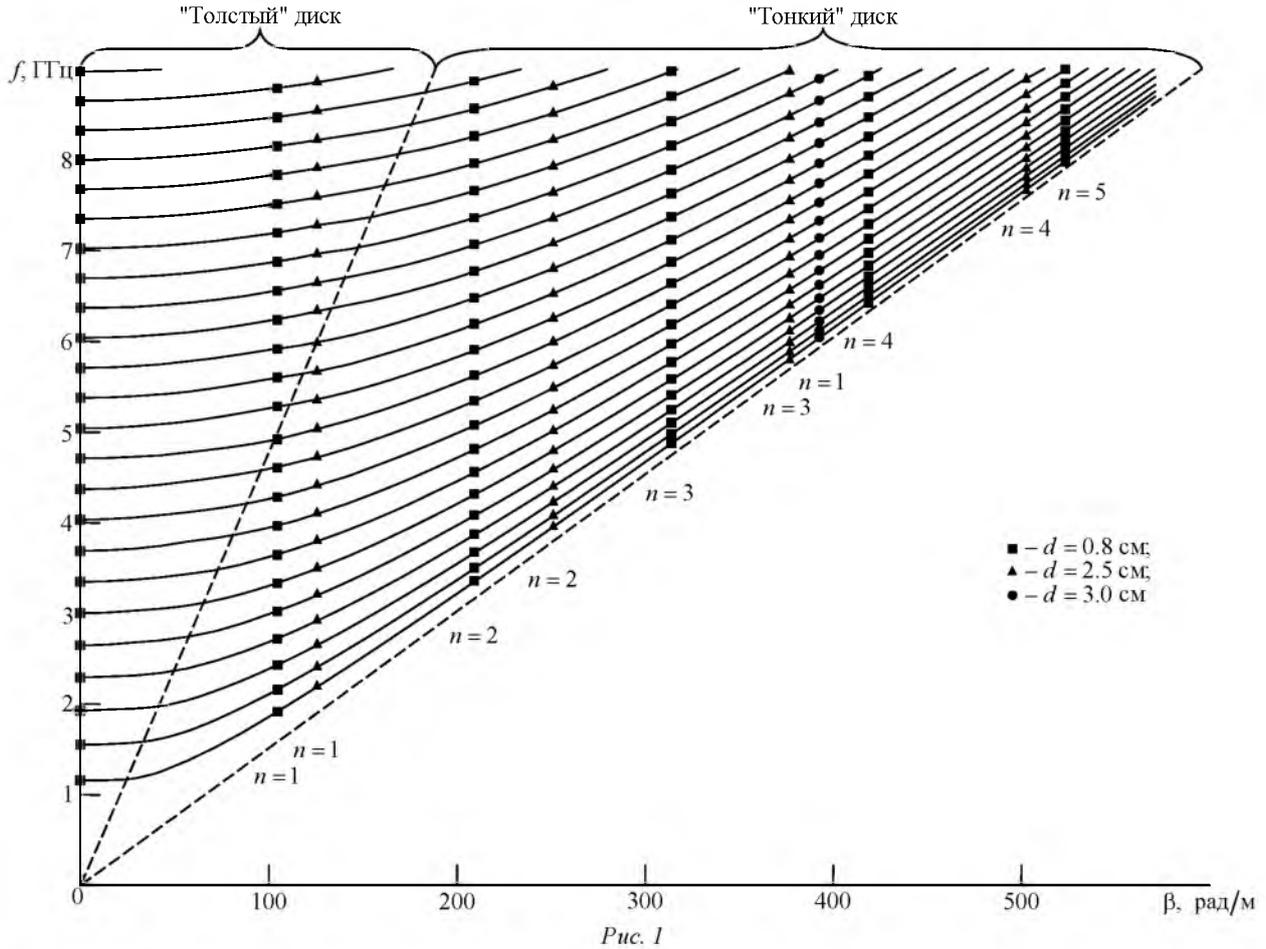
На рис. 1 представлены результаты расчета резонансных частот EH_{ml} -мод для диска с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 10$, $R = 5$ см для $m \in \overline{2, 25}$ при $l = 1$. Квадратными маркерами на рисунке обозначены резонансные частоты для диска с толщиной $d = 3$ см, треугольными – для $d = 2.5$ см, круглыми – для $d = 0.8$ см.

Из рисунка следует, что с уменьшением толщины резонатора его резонансные частоты сдвигаются в область больших продольных волновых чисел, что, в свою очередь, ведет к уменьшению области свободной дисперсии и повышению частоты резонанса. С увеличением индекса m также происходит увеличение области свободной дисперсии, причем при $m \gg 1$ спектр резонансных частот становится практически эквидистантным, а расстояние между соседними гармониками стремится к значению области свободной дисперсии Δf неограниченного стержня. Более детально данное изменение проиллюстрировано на рис. 2, где представлены результаты расчета области свободной дисперсии в зависимости от азимутального индекса при различных значениях толщины дискового резонатора для HE_{mln} -колебаний.

Как уже отмечалось, основное достоинство оптических резонаторов на модах шепчущей галереи состоит в их высокой добротности. Перейдем к ее описанию.

Собственная добротность вышеописанных резонаторов определяется потерями различной физической природы и представляется как [19]

² В настоящей статье принято $\varphi = 0$.



$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{\text{rad}}} + \frac{1}{Q_{\text{s.s}}} + \frac{1}{Q_{\text{mat}}},$$

где Q_{rad} – добротность, обусловленная радиационными потерями; $Q_{\text{s.s}}$ – добротность, обусловленная потерями на поверхностных неоднородностях резонатора; Q_{mat} – добротность, обусловленная потерями в материале резонатора.

Из физических соображений ясно, что качеством резонатора (при максимально подавленных потерях) можно управлять увеличением излучательной добротности Q_{rad} . Определим эту добротность следующим образом:

$$Q_{\text{rad}} = |k_{\text{re}} / (2k_{\text{im}})|,$$

где k_{re} , k_{im} – действительная и мнимая части волнового числа соответственно. Для определения этих частей рассмотрим неограниченный стержень, полагая, что в нем существуют чисто поперечные колебания, т. е. волновой процесс вдоль оси стержня отсутствует. В этом случае уравнение (7), соответствующее "толстому" диску, распадается на два более простых уравнения, описывающих поперечные TE - и TM -колебания, из которых и находятся действительная и мнимая части волнового числа.

На рис. 3 представлена зависимость излучательной добротности от порядкового номера TE -моды по угловой координате m при различных значениях индекса l . Заметим, что с увеличением значения индекса l излучательная добротность снижается.

На рис. 4 представлена зависимость излучательной добротности от порядкового номера TE -моды по угловой координате m при различных значениях диэлектрической проницаемости материала резонатора. Из представленных зависимостей следует, что с уменьшением диэлектрической проницаемости резонатора крутизна нарастания

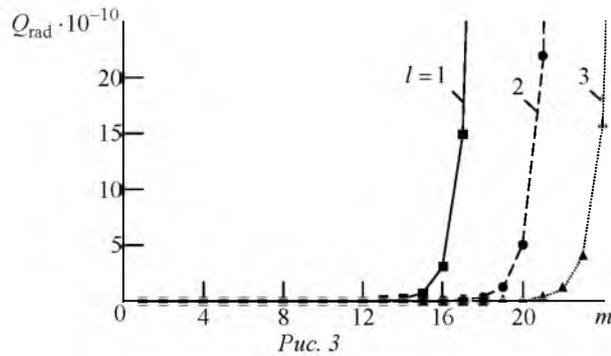


Рис. 3

излучательной добротности с ростом порядкового номера моды m снижается.

Как следует из представленных зависимостей, полученные формулы могут быть использованы для проектирования дисковых резонаторов с требуемыми рабочими характеристиками.

Таким образом, в настоящей статье представлен более простой и менее трудоемкий, по срав-

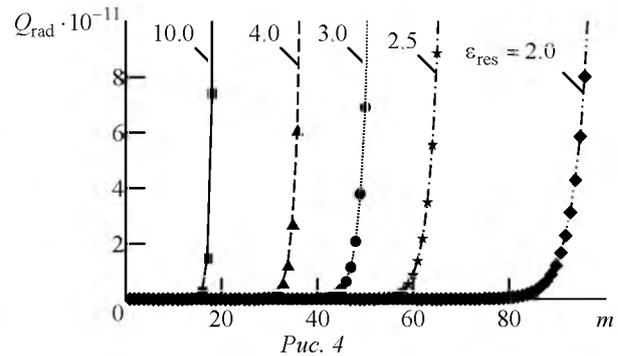


Рис. 4

нению с известными [4], [17], [18], метод расчета собственных резонансных частот оптических резонаторов с модами шепчущей галереи. Рассмотрено влияние толщины дискового резонатора на его собственные резонансные частоты, а также приведен метод приближенной оценки излучательной добротности таких резонаторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Capmany J., Novak D. Microwave Photonics Combines Two Worlds // *Nature Photon.* 2007. Vol. 1, iss. 1. P. 319–330.
2. Yao J. Microwave Photonics // *J. Lightwave Technol.* 2009. Vol. 27, iss. 3. P. 314–335.
3. Integrated Microwave Photonics / D. Marpaung, Ch. Roeloffzen, R. Heideman, A. Leinse, S. Sales, J. Capmany // *Lasers & Photon. Rev.* 2013. Vol. 7, iss. 4. P. 506–538.
4. Диэлектрические резонаторы / под ред. М. Е. Ильченко. М.: Радио и связь, 1989. 328 с.
5. Городецкий М. Л. Оптические микрорезонаторы с гигантской добротностью. М.: Физматлит. 2011. 416 с.
6. Optical Resonators with Ten Million Finesse / A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, V. S. Ilchenko, L. Maleki // *Optics Express.* 2007. Vol. 15, iss. 11. P. 6768–6773.
7. All-Dielectric Photonic-Assisted Wireless Receiver / A. Ayazi, R. C. J. Hsu, B. Houshmand, W. H. Steier, B. Jalali // *Optics Express.* 2008. Vol. 16, iss. 3. P. 1742–1747.
8. Whispering Gallery Mode based Optoelectronic Microwave Oscillator / A. B. Matsko, L. Maleki, A. A. Savchenkov V. S. Ilchenko // *J. of Modern Optics.* 2003. Vol. 50, iss. 15–17. P. 2523–2542.
9. Characterization Technique of Optical Whispering Gallery Mode Resonators in the Microwave Frequency Domain for Optoelectronic Oscillators / P.-H. Merrer, K. Saleh, O. Llopis, S. Berneschi, F. Cosi, G. N. Conti // *Appl. Opt.* 2012. Vol. 51, iss. 20. P. 4742–4748.
10. Strain-tunable High-Q Optical Microsphere Resonator / V. S. Ilchenko, P. S. Volikov, V. L. Velichansky, F. Treussart, V. Lefèvre-Seguin, J.-M. Raimond, S. Haroche // *Optics communications.* 1998. Vol. 145, iss. 1. P. 86–90.
11. High-Q Measurements of Fused-Silica Microspheres in the Near Infrared / D. W. Vernooy, V. S. Ilchenko, H. Ma-
12. Narrow-Line-Width Diode Laser with a High-Q Microsphere Resonator / V. V. Vassiliev, V. L. Velichansky, V. S. Ilchenko, M. L. Gorodetsky, L. Hollberg, A. V. Yarovitsky // *Optics Communications.* 1998. Vol. 158, iss. 1. P. 305–312.
13. Ultra-high-Q Toroid Microcavity on a Chip / D. K. Armani, T. J. Kippenberg, S. M. Spillane, K. J. Vahala // *Nature.* 2003. Vol. 421, iss. 6926. P. 925–928.
14. Chemically Etched Ultrahigh-Q Wedge-Resonator on a Silicon Chip / H. Lee, Tong Chen, L. Jiang, Ki Youl Yang, J. Seokmin, O. Painter, K. J. Vahala // *Nature Photonics.* 2012. Vol. 6, iss. 6. P. 369–373.
15. Ultrahigh-Q Tunable Whispering-Gallery-Mode Microresonator / M. Pöllinger, D. O'Shea, F. Warken, A. Rauschenbeutel // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 103, iss. 5. P. 053901.
16. Fabrication and Coupling to Planar High-Q Silica Disk Microcavities / T. J. Kippenberg, S. M. Spillane, D. K. Armani, K. J. Vahala // *Appl. Phys. Lett.* 2003. Vol. 83, iss. 4. P. 797–799.
17. Knox R. M. Dielectric Waveguide Microwave Integrated Circuits – an Overview // *IEEE Trans. on Microwave Theory Techniques.* 1976. Vol. MTT-24, iss. 11. P. 806–814.
18. Цибилов К. Н., Борисов С. А., Безбородов Ю. М. Методы расчета резонансных частот диэлектрических резонаторов // *Зарубежная радиоэлектроника.* 1981. № 11. С. 21–34.
19. Braginsky V. B., Gorodetsky M. L., Ilchenko V. S. Quality-Factor and Nonlinear Properties of Optical Whispering-Gallery Modes // *Phys. Lett. A.* 1989. Vol. 137, iss. 7-8. P. 393–397.

Для цитирования: Зарецкая Г. А., Дроздовский А. В., Калишиков Б. А. Метод расчета собственных резонансных частот оптических резонаторов с модами шепчущей галереи // *Изв. вузов России. Радиоэлектроника.* 2017. № 1. С. 56–62.

Зарецкая Галина Александровна – магистр техники и технологии по направлению "Электроника и микроэлектроника" (2012), аспирантка кафедры физической электроники и технологии Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Автор 5 научных работ. Сфера научных интересов – радиофотоника.

E-mail: shishmacova@gmail.com

Дроздовский Андрей Викторович – кандидат физико-математических наук (2011), ассистент кафедры физической электроники и технологии Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Автор более 50 научных работ. Сфера научных интересов – волновые процессы в нелинейных диэлектрических структурах.

E-mail: drozdovskiyav@gmail.com

Калиникос Борис Антонович – доктор физико-математических наук (1985), профессор (1989), заведующий кафедрой физической электроники и технологии Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Автор более 300 научных работ. Сфера научных интересов – возбуждение и распространение волн СВЧ в твердом теле; спиновые волны в тонких ферромагнитных пленках; солитоны огибающей спиновых волн; линейная и нелинейная динамика спиновых волн и хаос; устройства на основе ферритовых и мультиферритных структур; радиофотоника.

E-mail: spinlab@eltech.ru

G. A. Zaretskaya, A. V. Drozdovskii, B. A. Kalinikos
Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI"

Calculation of the Resonant Frequencies for a Whispering Gallery Mode Optical Resonator

Abstract. A method of calculation of resonant frequencies and thus free spectral range of high-Q dielectric disk resonators with whispering gallery modes is proposed. The method is based on application to the dispersion equation derived for a dielectric cylinder with unlimited length, dimensional quantization, due to the requirement of phase balance for the standing waves in the resonator. The simplified expressions suitable for calculation of optical microcavities used in the devices of radio photons are obtained.

Key words: Optical Resonators, Whispering Gallery Modes, Microcavities, Microwave Photonics

REFERENCES

1. Capmany J., Novak D. Microwave Photonics Combines Two Worlds. *Nature Photon.* 2007, vol. 1, no. 1, pp. 319–330.
2. Yao J. Microwave Photonics. *J. Lightwave Technol.* 2009, vol. 27, no. 3, pp. 314–335.
3. Marpaung D., Roeloffzen Ch., Heideman R., Leinse A., Sales S., Capmany J. Integrated Microwave Photonics. *Lasers & Photon. Rev.* 2013, vol. 7, no. 4, pp. 506–538.
4. Ilchenko M. E. *Dielektricheskie rezonatory* [The dielectric resonators]. *Radio i svyaz'*, 1989, 328 p. (In Russian)
5. Gorodetsky M. L. *Opticheskie mikrorezonatory s gigant'skoi dobrotnost'yu* [Optical microcavities with a giant Q]. Moscow, *Fizmatlit*, 2011, 416 p. (In Russian)
6. Savchenkov A. A., Matsko A. B., Ilchenko V. S., Maleki L. Optical Resonators with Ten Million Finesse. *Optics Express.* 2007, vol. 15, no. 11, pp. 6768–6773.
7. Ayazi A., Hsu R. C. J., Houshmand B., Steier W. H., Jalali B. All-Dielectric Photonic-Assisted Wireless Receiver. *Optics express.* 2008, vol. 16, no. 3, pp. 1742–1747.
8. Matsko A. B., Maleki L., Savchenkov A. A., Ilchenko V. S. Whispering Gallery Mode based Optoelectronic Microwave Oscillator. *Journal of Modern Optics.* 2003, vol. 50, no. 15–17, pp. 2523–2542.
9. Merrer P. H., Saleh K., Llopis O., Berneschi S., Cosi F., Conti G. N. Characterization Technique of Optical Whispering Gallery Mode Resonators in the Microwave Frequency Domain for Optoelectronic Oscillators. *Appl. Opt.* 2012, vol. 51, no. 20, pp. 4742–4748.
10. Ilchenko V. S., Volikov P. S., Velichansky V. L., Treussart F., Lefèvre-Seguin V., Raimond J. M., Haroche S. Strain-tunable High-Q Optical Microsphere Resonator. *Optics communications.* 1998, vol. 145, no. 1, pp. 86–90.
11. Vernoooy D. W., Ilchenko V. S., Mabuchi H., Streed E. W., Kimble H. J. High-Q Measurements of Fused-Silica Microspheres in the Near Infrared. *Optics Letters.* 1998, vol. 23, no. 4, pp. 247–249.
12. Vassiliev V. V., Velichansky V. L., Ilchenko V. S., Gorodetsky M. L., Hollberg L., Yarovitsky A. V. Narrow-Line-Width Diode Laser with a High-Q Microsphere Resonator. *Optics Communications.* 1998, vol. 158, no. 1, pp. 305–312.
13. Armani D. K., Kippenberg T. J., Spillane S. M., Vahala K. J. Ultra-high-Q Toroid Microcavity on a Chip. *Nature.* 2003, vol. 421, no. 6926, pp. 925–928.
14. Lee H., Tong Chen, Jiang L., Ki Youl Yang, Seokmin J., Painter O., Vahala K. J. Chemically Etched Ultra-high-Q Wedge-Resonator on a Silicon Chip. *Nature Photonics.* 2012, vol. 6, no. 6, pp. 369–373.
15. Pöllinger M., O'Shea D., Warken F., Rauschenbeutel A. Ultrahigh-Q Tunable Whispering-Gallery-Mode Microresonator. *Physical Review Letters.* 2009, vol. 103, no. 5, pp. 053901.
16. Kippenberg T. J., Spillane S. M., Armani D. K., Vahala K. J. Fabrication and Coupling to Planar High-Q Silica Disk Microcavities. *Applied Physics Letters.* 2003, vol. 83, no. 4, pp. 797–799.

17. Knox R. M. Dielectric Waveguide Microwave Integrated Circuits – an Overview. IEEE Trans. on Microwave Theory Techniques. 1976, vol. MTT-24, no. 11, pp. 806–814. (In Russian)

18. Tsibizov K. N., Borisov S. A., Bezborodov Yu. M. *Metody rascheta rezonansnykh chastot dielektricheskikh rezonatorov*. Zarubezh. Radioelektron. 1981, no.11, pp. 21–34. (In Russian)

19. Braginsky V. B., Gorodetsky M. L., Ilchenko V. S. Quality-Factor and Nonlinear Properties of Optical Whispering-Gallery Modes. Physics Letters A. 1989, vol. 137, no. 7-8, pp. 393–397.

Received November, 10, 2016

For citation: Zaretskaya G. A., Drozdovskii A. V., Kalinikos B. A. Calculation of the Resonant Frequencies for a Whispering Gallery Mode Optical Resonator. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Rossii. Radioelektronika* [Journal of the Russian Universities. Radioelectronics]. 2017, no. 1, pp. 56–62. (In Russian)

Galina A. Zaretskaya – Master’s Degree of techniques and technology in electronics and micro electronics (2012), post-graduate student of the department of Physical Electronics and Technology of Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI". The author of five scientific publications. Area of expertise: radio photonics.

E-mail: shishmacova@gmail.com

Andrey V. Drozdovskii – Ph. D. in physics and mathematics (2011), assistant of the department of Physical Electronics and Technology of Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI". The author of more than 50 scientific publications. Area of expertise: wave processes in nonlinear dielectric structures.

E-mail drozdovskiyav@gmail.com

Boris A. Kalinikos – D. Sc. in physics and mathematics (1985), Professor (1989), the Chief of the Department of Physical Electronics and Technology of Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI". The author of more than 300 scientific publications. Area of expertise: excitation and propagation of microwave waves in the solid state; spin waves in thin ferromagnetic films; solitons of the spin waves envelope; linear and nonlinear dynamics of spin waves and chaos; devices based on ferrite and multiferroic structures; radio photonics.

E-mail: spinlab@eltech.ru