

УДК 621.396.967.2

А. А. Монаков

Санкт-Петербургский государственный университет  
аэрокосмического приборостроения

ул. Большая Морская, д. 67, лит. А, Санкт-Петербург, Россия, 190000

## Модифицированный алгоритм Банкрофта для систем мультилатерации

**Аннотация.** В системах мультилатерации для оценки местоположения (МП) объектов часто используется алгоритм Банкрофта, синтезированный для оценки МП объектов в спутниковых системах навигации. Алгоритм позволяет прямым способом получить оценку МП и не требует больших вычислительных затрат при реализации. Данные свойства выгодно отличают этот алгоритм от алгоритмов, работающих на основе решения оптимизационных задач. Однако, как показывают результаты математического моделирования, точность получаемых с помощью алгоритма оценок может быть в несколько раз ниже, чем потенциально достижимая. Предлагается способ модификации алгоритма Банкрофта, который состоит в уточнении оценок Банкрофта путем применения метода малых возмущений. Показано, что использование предлагаемой модификации позволяет в 2,5–3 раза увеличить точность оценок МП объекта и сделать ее равной потенциально достижимой. При этом сложность модифицированного алгоритма возрастает незначительно.

**Ключевые слова:** радионавигация, мультилатерация, оценка местоположения, алгоритм Банкрофта

**Для цитирования:** Монаков А. А. Модифицированный алгоритм банкрофта для систем мультилатерации // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2018. № 1. С. 50–55.

A. A. Monakov

Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation

67, Bolshaya Morskaya Str., bld. A, 190000, St. Petersburg, Russia

### Modified Bancroft Algorithm for Multilateration Systems

**Abstract.** In multilateration systems, Bancroft algorithm is often used to estimate the location of objects. This algorithm is synthesized for satellite navigation systems. The algorithm allows to obtain the location estimation by means of direct method and does not require significant computing costs. These properties set it apart from algorithms using optimization approaches. However, according to the results of computer simulation, the accuracy of estimation yielded by the algorithm can be several times worse than potentially enable one. The article proposes a method for modifying the Bancroft algorithm. Modification involves refining the Bancroft estimates by applying the method of small perturbations. The article shows that the use of the proposed modification allows to increase the accuracy of estimates by 2.5–3 times and to make it equal to the Cramer-Rao boundary. At the same time, the complexity of the modified algorithm grows insignificantly.

**Key words:** Radio Navigation, Multilateration, Position Estimation, Bancroft Algorithm

**For citation:** Monakov A. A. Modified Bancroft Algorithm for Multilateration Systems. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Rossii. Radioelektronika* [Journal of the Russian Universities. Radioelectronics]. 2018, no. 1, pp. 50–55. (In Russian)

**Введение.** Многопозиционные радионавигационные системы оценки местоположения объектов в пространстве получили в настоящее время широкое распространение и стали серьезными конкурентами радиолокационных комплексов управления воздушным движением, поскольку имеют следующие неоспоримые преимущества:

- возможность покрытия больших пространств, в т. ч. со сложным рельефом местности;
- низкая стоимость оборудования, размещения и эксплуатационных расходов;

– высокая надежность и помехозащищенность.

В научно-технической литературе эти системы получили название систем мультилатерации от английского термина "multilateration" (MLAT), который, в свою очередь, образован от термина "trilateration" (трилатерация) [1]. В соответствии с ГОСТ 22268–76 "Геодезия. Термины и определения" трилатерация – это метод построения геодезической сети в виде треугольников, в которых измерены все их стороны. Системы мультилатерации предполагают определение местоположения

(МП) объекта путем измерения расстояний объекта до произвольного числа опорных радионавигационных точек (РНТ), в которых размещены приемники, способные принимать сигналы, излучаемые с борта объекта. Геодезические координаты опорных РНТ известны с высокой точностью.

В зависимости от масштаба решаемых задач системы мультilaterации делятся на локальные системы, за которыми в научно-технической литературе закрепилось название MLAT-системы, и глобальные системы, которые называются в литературных источниках WAM-системами (от англ. Wide Area Multilateration) [2]. Физические принципы работы обеих категорий одинаковы. Разница заключается в том, что первые используются для определения МП объектов в пределах поля аэродрома, вторые решают задачи навигации воздушных судов в области пространства, имеющего протяженность в сотни километров вдоль поверхности и десятки километров над поверхностью земного шара.

Одной из проблем при создании систем мультilaterации является синтез алгоритмов оценки МП объектов в двух- (MLAT-системы) или трехмерном (WAM-системы) пространстве. Одним из широко используемых алгоритмов решения этой задачи является алгоритм Банкрофта [3], который первоначально был предложен для решения задачи оценки МП в спутниковых навигационных системах. Привлекательной стороной этого алгоритма является его простота и малый объем вычислений при реализации. Вместе с тем точность оценок координат объектов, даваемых этим алгоритмом, в некоторых ситуациях не соответствует установленным нормативам. Поэтому в ряде работ [4]–[6] были продолжены поиски лучшего метода оценивания. В частности, в ряде работ оценка МП сводится к решению некоторой оптимизационной задачи, что значительно усложняет алгоритм работы и увеличивает объем вычислений.

Настоящая статья посвящена синтезу и анализу алгоритма оценивания МП объекта в системе мультilaterации, который сочетает простоту метода Банкрофта и позволяет получить точность, близкую к потенциально достижимой.

**Потенциальная точность оценки МП в системе мультilaterации.** Рассмотрим систему мультilaterации, которая содержит базовую станцию, размещенную в начале некоторой трехмерной системы координат  $XYZ$ , и множество  $J$  опорных приемных станций, геодезические координаты  $\{x_j, y_j, z_j\}_{j=1}^J$  которых известны с высо-

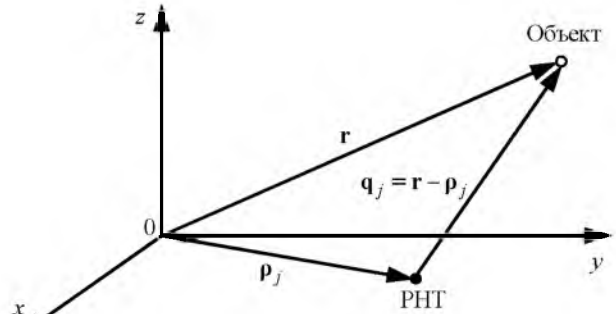


Рис. 1

кой точностью (рис. 1). Пусть базовая станция излучает в момент времени  $t$  запросный сигнал. Если МП объекта соответствует радиус-вектор  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ , то приемник объекта примет запросный сигнал в момент времени  $t + r/c$ , где  $r = \|\mathbf{r}\|$  – длина вектора  $\mathbf{r}$ ;  $c$  – скорость света. Бортовой ответчик объекта излучит ответный сигнал через время  $\tau_{\text{отв}}$ , которое обычно равно 3 мкс и необходимо, чтобы обработать запросный сигнал в бортовом ответчике. Этот ответный сигнал придет в точку расположения  $j$ -го приемника  $\mathbf{\rho}_j = \{x_j, y_j, z_j\}$  в момент времени  $t + r/c + \tau_{\text{отв}} + q_j/c$ , где  $q_j = \|\mathbf{q}_j\|$  – длина вектора  $\mathbf{q}_j = \mathbf{r} - \mathbf{\rho}_j$  (рис. 1). Таким образом, в отсутствие ошибок измерения дальностей и при строгом синхронизме часов базовой и опорных станций в РНТ будут вычислены псевдодальности  $R_j = r + q_j + c\tau_{\text{отв}} + c\tau$ , где  $\tau = t - \hat{t}$  – разность хода часов базовой и опорных станций;  $\hat{t}$  – предполагаемое в системе РНТ время излучения запросного сигнала. Располагая множеством псевдодальностей  $\{R_j\}_{j=1}^J$ , получим систему уравнений вида

$$r + q_j + c\tau = R_j - c\tau_{\text{отв}}; j = 1, \dots, J,$$

решение которой относительно четырех неизвестных  $x, y, z, \tau$  позволит решить задачу оценки МП объекта.

В действительности измерения псевдодальностей сопровождаются ошибками, в результате которых получим следующую систему уравнений:

$$r + q_j + c\tau = \hat{R}_j - c\tau_{\text{отв}}; j = 1, \dots, J, \quad (1)$$

где  $\hat{R}_j = R_j + \delta R_j + c\delta\tau_j$ . Здесь  $\delta R_j$  – ошибка измерения дальности по ответному сигналу, возникающая в измерителе  $j$ -й РНТ;  $\delta\tau_j$  – уход внутренних часов  $j$ -й РНТ относительно системного времени. Существование указанных ошибок

приведет к ошибкам оценки МП объекта. Определим статистические характеристики этих ошибок. Пусть вектор ошибки МП равен  $\delta \mathbf{r}$ . Тогда система уравнений (1) может быть записана в виде

$$\|\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}\| + \|\mathbf{q}_j + \delta \mathbf{r}\| + c\tau = R_j + \Delta R_j - c\tau_{\text{отв}};$$

$$j = 1, \dots, J,$$

где  $\Delta R_j = \delta R_j + c\delta\tau_j$  – полная ошибка измерения псевдодальности. Считая, что ошибка оценки МП мала по сравнению с расстояниями  $r$  и  $q_j$ , т. е.  $\|\delta \mathbf{r}\| \ll \|\mathbf{r}\|$ ,  $\|\mathbf{q}_j\|$ ,  $j = 1, \dots, J$ , получим следующую упрощенную систему:

$$(\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{q}}_j, \delta \mathbf{r}) = [R_j - c\tau - c\tau_{\text{отв}} - r - q_j] + \Delta R_j, j = 1, \dots, J, \quad (2)$$

где  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$  и  $\hat{\mathbf{q}}_j = \mathbf{q}_j/q_j$  – единичные векторы в направлениях  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{q}_j$ ;  $(\cdot)$  – оператор скалярного произведения векторов. Учитывая, что  $R_j = c(\tau + \tau_{\text{отв}}) + r + q_j = 0$ ;  $j = 1, \dots, J$ , систему уравнений (2) можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{A}^T \delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{R}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{A} = (\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{q}}_1 | \dots | \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{q}}_J)$  – матрица размера  $3 \times J$ ;  $\Delta \mathbf{R} = \{\Delta R_j\}_{j=1}^J$  – вектор длины  $J$ ; "T" – оператор транспонирования. Умножив правую и левую части (3) на соответствующие транспонированные величины, после усреднения по случайным переменным получим:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} = \mathbf{C}_R,$$

где  $\mathbf{C} = \langle \delta \mathbf{r}^T \delta \mathbf{r} \rangle$  – корреляционная матрица ошибок оценки МП;  $\mathbf{C}_R = \langle \delta \mathbf{R} \delta \mathbf{R}^T \rangle$  – корреляционная матрица ошибок оценки псевдодальностей. Тогда

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}_R \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}.$$

Если считать ошибки измерения псевдодальностей статистически независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, т. е.  $\mathbf{C}_R = (\sigma_R^2 + c^2 \sigma_\tau^2) \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица;  $\sigma_R^2$  и  $\sigma_\tau^2$  – дисперсии ошибок оценивания дальностей и часов РНТ соответственно, окончательно получим следующее уравнение для корреляционной матрицы ошибок оценки МП объекта:

$$\mathbf{C} = (\sigma_R^2 + c^2 \sigma_\tau^2) (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}. \quad (4)$$

Поскольку для вывода (4) использовался метод малого параметра, то, как показано в [7], полученное выражение является нижней границей Крамера–Рао для корреляционной матрицы ошибок.

**Алгоритм Банкрофта оценки МП объекта.** Перепишем систему уравнений (1) в виде

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{p}_j\| + b = \check{R}_j; j = 1, \dots, J, \quad (5)$$

где  $b = r + c\tau$  – независимый от номера  $j$  скалярный параметр;  $\check{R}_j = \hat{R}_j - c\tau_{\text{отв}}$  – скорректированная относительно времени задержки ответного сигнала псевдодальность. Можно считать, что в системе (5) неизвестными являются радиус-вектор МП объекта  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$  и параметр  $b$ . Включение параметра  $b$  в число неизвестных формально основывается на том, что ни длина вектора  $\mathbf{r}$ , ни разность хода часов  $\tau$  не зависят от номера  $j$  и являются общими для всех уравнений системы (5). Более того, можно утверждать, что на основании системы (1) невозможно раздельно оценить  $r$  и  $\tau$ . Этот принципиальный вывод будет в дальнейшем использован при анализе точности алгоритма Банкрофта.

Перенеся  $b$  в левую часть уравнений (5) и возведя в квадрат обе части, систему можно представить в виде

$$2(\mathbf{p}_j, \mathbf{r}) - 2\check{R}_j b = (\|\mathbf{r}\|^2 - b^2) + (\|\mathbf{p}_j\|^2 - \check{R}_j^2), \quad (6)$$

$$j = 1, \dots, J.$$

Введем следующие векторы и матрицы:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ ib \end{pmatrix}; \mathbf{r}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_j \\ i\check{R}_j \end{pmatrix}; \mathbf{B}^T = (\mathbf{r}_1 | \dots | \mathbf{r}_j); \lambda = \frac{1}{2}(\mathbf{z}, \mathbf{z});$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2}((\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) | \dots | (\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j))^T; \mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T$$

и перепишем (6) в матричном виде:

$$\mathbf{B} \mathbf{z} = \lambda \mathbf{e} + \mathbf{b}. \quad (7)$$

Заметим, что  $(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{r}\|^2 - b^2$  и  $(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j) = \|\mathbf{p}_j\|^2 - \check{R}_j^2$  – скалярное произведение Лоренца [3], которое для двух действительных векторов  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z, ct_u)^T$  и  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z, ct_v)^T$  равно  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z - c^2 t_u t_v$ . Это обстоятельство позволяет избавиться при реализации алгоритма от вычислений с комплексными чис-

лами. Отказ от использования комплексных чисел становится возможен при следующих заменах векторов  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ b \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{r}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_j \\ R_j \end{pmatrix}$  и обычного скалярного произведения  $(\cdot, \cdot)$  на скалярное произведение Лоренца  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Уравнение (7) связывает неизвестный вектор  $\mathbf{z}$  и величину  $(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 2\lambda$ . В то же время параметр  $\lambda = \frac{1}{2}(\mathbf{z}, \mathbf{z})$  – скаляр. Поэтому вектор  $\mathbf{z}$  является суммой двух векторов:

$$\mathbf{z} = \lambda \mathbf{B}^\# \mathbf{e} + \mathbf{B}^\# \mathbf{b} = \lambda \mathbf{c} + \mathbf{d}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{c} = \mathbf{B}^\# \mathbf{e}$  и  $\mathbf{d} = \mathbf{B}^\# \mathbf{b}$  – векторы;  $\mathbf{B}^\# = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T$  – левая псевдообратная матрица матрицы  $\mathbf{B}$ . Учитывая, что  $(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 2\lambda$ , из (8) получим следующее квадратное уравнение для  $\lambda$ :

$$(\mathbf{c}, \mathbf{c})\lambda^2 + 2[(\mathbf{c}, \mathbf{d}) - 1]\lambda + (\mathbf{d}, \mathbf{d}) = 0,$$

которое имеет два решения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{[(\mathbf{c}, \mathbf{d}) - 1]}{(\mathbf{c}, \mathbf{c})} \pm \frac{\sqrt{[(\mathbf{c}, \mathbf{d}) - 1]^2 - (\mathbf{c}, \mathbf{c})(\mathbf{d}, \mathbf{d})}}{(\mathbf{c}, \mathbf{c})}. \quad (9)$$

Один из корней (9) соответствует истинному решению системы, другой – ложному. Выбор корня, соответствующего истинному решению, можно осуществить на основании обратной подстановки  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в систему (7). Таким образом, задача по определению МП объекта решена. Данный алгоритм решения был впервые предложен С. Банкрофтом для оценки МП объектов в спутниковых навигационных системах. Алгоритм очень прост для реализации, так как требует вычисления обратной матрицы для матрицы размера  $4 \times 4$ .

Оценим точностные характеристики алгоритма и сравним их с потенциально достижимой точностью, которая была определена ранее. Прodelать эти вычисления аналитически вряд ли возможно, поэтому воспользуемся методом математического моделирования. В ходе работы над статьей был сделан следующий машинный эксперимент. Десять ( $J = 10$ ) РНТ случайным образом располагались на окружности диаметром 10 км. В центре окружности помещалась базовая станция. Объект также случайным образом размещался внутри окружности. Расстояния измерялись с ошибками, статистические характеристики которых соответ-

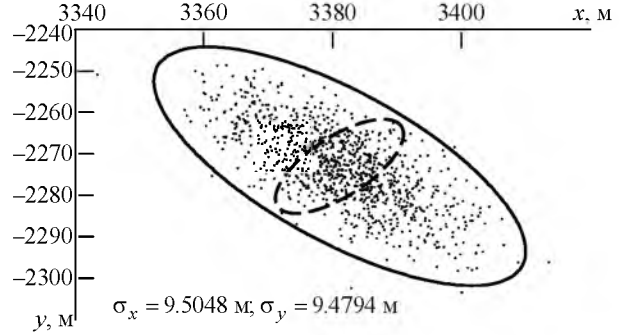


Рис. 2

ствовали  $\sigma_R = 10$  м и  $\sigma_\tau = 5$  нс. Результаты оценки МП по  $K = 1000$  испытаний приведены на рис. 2. Здесь же сплошной линией представлен эллипс ошибок, построенный по результатам оценки корреляционной матрицы ошибок и соответствующий вероятности попадания отметки объекта внутрь эллипса  $P = 0.99$ . Штриховой кривой соответствует такой же эллипс для потенциальной точности оценки, построенный на основании (4).

Представленные на рисунке результаты свидетельствуют о том, что в целом алгоритм Банкрофта позволяет решить задачу оценки МП объекта. Однако точность оценки значительно ниже потенциально достижимой. Причиной этого может служить упомянутая ранее невозможность раздельно использовать при оценивании информацию, содержащуюся в длине вектора  $\mathbf{r}$  и разности хода часов  $\tau$ . Вследствие чего информация о МП объекта, содержащаяся в  $r$ , теряется.

**Модификация алгоритма Банкрофта.** Несмотря на сравнительно большую ошибку, алгоритм Банкрофта может быть использован для грубого оценивания МП объекта. Для уточнения оценки можно использовать метод малого параметра (метод возмущений). Этим малым параметром будет оценка вектора ошибки  $\delta \mathbf{r}$ . В этом и состоит смысл предлагаемой модификации.

Вернемся к системе уравнений (2), которую удобно переписать в виде

$$(\mathbf{h}_j, \delta \mathbf{r}) = \Delta \bar{R}_j; j = 1, \dots, J,$$

где  $\mathbf{h}_j = \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{q}}_j$  – вектор и  $\Delta \bar{R}_j$  – оценка ошибки измерения псевдодальности. Орты  $\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\hat{\mathbf{q}}_j$  и ошибки  $\Delta \bar{R}_j$  можно оценить, используя оценки  $\|\check{\mathbf{r}}_B\|$  и  $\bar{c}_B$ , полученные методом Банкрофта:

$$\hat{\mathbf{r}} = \check{\mathbf{r}}_B / \|\check{\mathbf{r}}_B\|;$$

$$\hat{\mathbf{q}}_j = (\check{\mathbf{r}}_B - \mathbf{p}_j) / \|\check{\mathbf{r}}_B - \mathbf{p}_j\|; j = 1, \dots, J;$$

$$\Delta \tilde{R}_j = \hat{R}_j - R_{Bj}; j = 1, \dots, J.$$

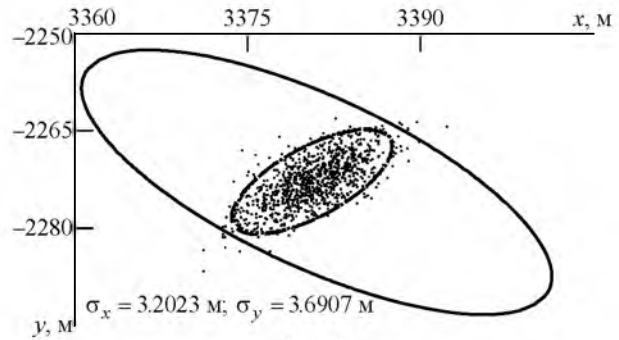
где  $R_{Bj} = c(\tau_{Bj} + \tau_{отв}) + \check{r}_{Bj} + \check{q}_{Bj}$ ,  $\check{r}_{Bj} = \|\check{\mathbf{r}}_{Bj}\|$ ,  $\check{q}_{Bj} = \|\check{\mathbf{r}}_{Bj} - \mathbf{p}_j\|$ . Тогда методом наименьших квадратов можно получить следующую оценку вектора:

$$\delta \check{\mathbf{r}} = \mathbf{H}^\# \Delta \check{\mathbf{R}},$$

где  $\mathbf{H}^\# = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T$  – левая псевдообратная матрица матрицы  $\mathbf{H}$ . Окончательное решение получается суммированием:

$$\check{\mathbf{r}} = \check{\mathbf{r}}_B + \delta \check{\mathbf{r}}.$$

На рис. 3 приведены результаты математического эксперимента с использованием рассмотренной модификации. Условия проведения эксперимента полностью повторяли те, что были при машинном эксперименте, который был рассмотрен ранее. Эллипс ошибок, построенный пунктирной линией по результатам оценки корреляционной матрицы ошибок, практически совпал на рисунке с эллипсом для потенциальной точности (штриховая линия). Таким образом, рисунок доказывает правомерность предлагаемой модификации: результаты отдельных оценок оказались в эллипсе ошибок, который соответствует потенциально достижимой точности оценки МП объекта. Цена, которую приходится платить за модификацию алгоритма Банкрофта, невелика. Усложнение заключается в необходимости вычислять псевдообратную матрицу  $\mathbf{H}^\#$ . Учитывая, что основной операцией при этом является обращение матрицы  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ , размер которой  $3 \times 3$ , вычислительные затраты при модификации возрастают незначительно. В то же время среднеквадратическое отклоне-



ние (СКО) оценок уменьшается по сравнению с оценками по методу Банкрофта в 2.5–3 раза. Так, в рассмотренном машинном эксперименте СКО ошибок с величин  $\sigma_x \approx \sigma_y \approx 9.5$  м уменьшилось до значений  $\sigma_x \approx 3.3$  м,  $\sigma_y \approx 3.7$  м.

**Выводы.** В системах мультilaterации для оценки МП объектов часто используется алгоритм Банкрофта, позволяющий прямым способом получить оценку МП и не требующий значительных вычислительных затрат. Это выгодно отличает его от алгоритмов, работающих на основе решения оптимизационных задач. Однако, как показывают результаты математического моделирования, точность получаемых с помощью алгоритма оценок может быть в несколько раз ниже, чем потенциально достижимая. В статье предлагается способ модификации алгоритма Банкрофта, который состоит в уточнении оценок Банкрофта путем применения метода малых возмущений. В статье показано, что использование предлагаемой модификации позволяет в 2.5–3 раза увеличить точность оценок МП объекта и сделать ее равной потенциально достижимой. При этом сложность модифицированного алгоритма возрастает незначительно.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Trilateration> (дата обращения: 01.02.2018).
2. Multilateration (MLAT) Concept of Use. ICAO Asia and Pacific Office, Sept. 2007. URL: [https://www.icao.int/APAC/Documents/edocs/mlat\\_concept.pdf](https://www.icao.int/APAC/Documents/edocs/mlat_concept.pdf) (дата обращения: 01.02.2018).
3. Bancroft S. An Algebraic Solution of the GPS Equations // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 1985. Vol. AES-21, № 1. P. 56–59.
4. Bakhoun E. G. Closed-Form Solution of Hyperbolic Geolocation Equations // IEEE Trans. on Aerospace and Electronics Systems. 2006. Vol. AES-42, № 4. P. 1396–1404.

Статья поступила в редакцию 15 ноября 2017 г.

5. Localization Algorithms for Multilateration (MLAT) Systems in Airport Surface Surveillance / I. A. Mantilla-Gaviria, M. Leonardi, G. Galati, J. V. Balbastre-Tejedor // Signal, Image and Video Processing. 2015. Vol. 9, № 7. P. 1549–1558.
6. Leonardi M., Mathias A., Galati G. Two Efficient Localization Algorithms for Multilateration. International Journal of Microwave and Wireless Technologies. 2009. Vol. 1, № 3. P. 223–229.
7. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983. 320 с.

**Монаков Андрей Алексеевич** – доктор технических наук (2000), профессор (2005) кафедры радиотехнических систем Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения. Почетный машиностроитель РФ (2005), почетный работник высшего профессионального образования РФ (2006). Автор более 150 научных работ. Сфера научных интересов – радиолокация протяженных целей; цифровая обработка сигналов; исследование природных сред радиотехническими методами; вопросы управления воздушным движением.  
E-mail: a\_monakov@mail.ru

## REFERENCES

1. Available at: <https://en.wikipedia.org/wiki/Trilateration> (accessed: 01.02.2018).
2. Multilateration (MLAT) Concept of Use. ICAO Asia and Pacific Office, September 2007. Available at: [https://www.icao.int/APAC/Documents/edocs/mlat\\_concept.pdf](https://www.icao.int/APAC/Documents/edocs/mlat_concept.pdf) (accessed: 01.02.2018).
3. Bancroft S. An Algebraic Solution of the GPS Equations. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 1985, vol. AES-21, no. 1, pp. 56–59.
4. Bakhoun E. G. Closed-Form Solution of Hyperbolic Geolocation Equations. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronics Systems*. 2006, vol. AES-42, no. 4, pp. 1396–1404.
5. Mantilla-Gaviria I. A., Leonardi M., Galati G., Balbastre-Tejedor J. V. Localization Algorithms for Multilateration (MLAT) Systems in Airport Surface Surveillance. *Signal, Image and Video Processing*. 2015, vol. 9, no. 7, pp. 1549–1558.
6. Leonardi M., Mathias A., Galati G. Two Efficient Localization Algorithms for Multilateration. *International Journal of Microwave and Wireless Technologies*. 2009, vol. 1, no. 3, pp. 223–229.
7. Tikhonov V. K. *Optimal'nyi priem signalov* [Optimal Signal Reception]. Moscow, *Radio i Svyaz'*, 1983, 320 p. (in Russian)

Received October, 17, 2017

**Andrej A. Monakov** – D.Sc. in Engineering (2000), Professor (2005) of the Department of Radio Engineering Systems of Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation (Saint Petersburg). Honored Mechanical Engineer of the Russian Federation (2005), Honored Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation (2006). The author of more than 150 scientific publications. Area of expertise: long-range radar, digital signal processing, research of natural environments by radio engineering methods, issues of air traffic control.  
E-mail: a\_monakov@mail.ru