

УДК 621.391

Г. С. Нахмансон  
 ВУНЦ ВВС "Военно-воздушная академия  
 им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина"  
 Г. А. Бакаева  
 Воронежский институт ГПС МЧС России

## Вероятность ошибки оценивания значений информационного символа в системах радиосвязи с фазоманипулированными широкополосными сигналами с учетом их искажений во входных цепях приемника

*Рассмотрен когерентный прием фазоманипулированного широкополосного сигнала (ФМШПС) со случайной начальной фазой и амплитудой, содержащей регулярную и флуктуационную составляющие, корреляционным приемником на фоне шумов аппаратуры. Получены аналитические выражения для средней вероятности ошибки (СВО) оценивания значений информационного символа, соответствующего биту информации ФМШПС, с учетом его искажений во входных цепях приемника. Проанализированы зависимости СВО от времени задержки принимаемого сигнала, отношения сигнал/шум и ширины полосы пропускания фильтра.*

**Фазоманипулированный широкополосный сигнал, псевдослучайная последовательность, входной полосовой фильтр, корреляционный приемник, вероятность ошибки оценивания информационного символа**

В современных системах радиосвязи (СРС) широко применяются фазоманипулированные широкополосные сигналы (ФМШПС). Вопросам эффективности обработки таких сигналов в СРС посвящено большое количество работ (см., например, [1]–[4]). При этом, как правило, не учитываются искажения принимаемых сигналов во входных цепях приемников. В [5] рассмотрено влияние искажений ФМШПС во входном полосовом фильтре корреляционного приемника только на характеристики обнаружения сигнала. Поэтому представляет интерес анализ влияния искажений, вносимых входными цепями приемника, на ошибки оценивания значения информационного символа ФМШПС, принимаемого на фоне внутренних шумов аппаратуры.

Целью настоящей статьи является анализ средней вероятности ошибки (СВО) оценивания значения информационного символа ФМШПС, принимаемого в условиях внутренних шумов аппаратуры с учетом искажений во входных цепях приемника.

Пусть на вход полосового фильтра когерентного корреляционного приемника поступает аддитивная смесь сигнала и шума:

$$x(t) = s(t - \varepsilon_0) + n(t),$$

где  $s(\cdot)$  – ФМШПС, несущий полезную информацию;  $\varepsilon_0$  – время задержки принимаемого сиг-

нала относительно выбранного начала отсчета;  $n(t)$  – шумы аппаратуры.

ФМШПС обладает бинарной модуляцией фазы по закону псевдослучайной последовательности (ПСП) и описывается следующим образом:

$$s(t) = ad \sum_{v=1}^L p_v \operatorname{rect} \left[ \frac{t - (v-1)\tau_{\text{И}}}{\tau_{\text{И}}} \right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где  $a \geq 0$  – амплитуда принимаемого сигнала, содержащая регулярную ( $a_0$ ) и флуктуирующую составляющие;  $d$  – двоичный информационный символ, принимающий значения  $\{-1, 1\}$  и подлежащий оценке в процессе приема;  $L$  – число импульсов ПСП;  $p_v$ ,  $v = 1, 2, \dots, L$  – элементы кода ПСП, принимающие значения  $\{-1, 1\}$  ( $p_k = p_{k \pm L}$  [2], [3]);

$$\operatorname{rect} \left[ \frac{t - (v-1)\tau_{\text{И}}}{\tau_{\text{И}}} \right] = \begin{cases} 1, & (v-1)\tau_{\text{И}} \leq t \leq v\tau_{\text{И}}; \\ 0, & t < (v-1)\tau_{\text{И}}; t > v\tau_{\text{И}}, \end{cases}$$

$$v = 1, 2, \dots, L$$

– огибающая  $v$ -го элементарного импульса ПСП, имеющая прямоугольную форму с длительностью  $\tau_{\text{И}}$ ;  $\omega_0 = 2\pi f_0$  ( $f_0$  – несущая частота);  $\varphi_0$  – случайная начальная фаза.

Амплитуда и случайная начальная фаза имеют совместное распределение вида

$$W(a, \varphi_0) = \frac{a}{2\pi\sigma_a^2} \exp \left[ -\frac{a^2 + a_0^2 - 2aa_0 \cos \varphi_0}{2\sigma_a^2} \right], \quad (1)$$

где  $\sigma_a^2$  – дисперсия флуктуирующей составляющей амплитуды.

Шумы аппаратуры аппроксимируются гауссовским стационарным шумом ( $n(t)$ ) с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$\langle n(t_1)n(t_2) \rangle = (N_0/2)\delta(t_1 - t_2),$$

где  $N_0$  – спектральная плотность мощности шума;  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция;  $\langle \cdot \rangle$  – символ статистического усреднения.

Предполагается, что длительность информационных символов  $T = L\tau_{\text{И}}$ , поэтому ширина спектра широкополосных сигналов в  $L$  раз больше ширины спектра информационных сигналов.

В дальнейшем предполагается, что амплитудно-частотная характеристика входного полосового фильтра имеет прямоугольную форму с полосой пропускания  $\Delta\omega$  и рабочую частоту, совпадающую с частотой несущего сигнала. Тогда импульсная характеристика фильтра определяется соотношением

$$h(t) = k_0 \frac{\Delta\omega}{\pi} \text{sinc} \frac{\Delta\omega}{2} t \cos(\omega_0 t),$$

где  $k_0$  – коэффициент пропорциональности;  $\text{sinc } x = \sin x/x$ .

В этом случае сигнал на выходе полосового фильтра можно представить как

$$x_{\text{пр}}(t) = s_{\text{пр}}(t) + n_{\text{пр}}(t), \quad (2)$$

где  $s_{\text{пр}}(t)$ ,  $n_{\text{пр}}(t)$  – сигнальная и помеховая составляющие принимаемого сигнала соответственно.

Сигнальная составляющая описывается выражением:

$$s_{\text{пр}}(t) = ad \begin{cases} p_1 \int_0^t \cos(\omega_0 \tau + \varphi_0) h(t - \tau) d\tau, & 0 < t < \tau_{\text{И}}; \\ p_v \int_{(v-1)\tau_{\text{И}}}^t \cos(\omega_0 \tau + \varphi_0) h(t - \tau) d\tau + \sum_{k=1}^{v-1} p_k \int_{(k-1)\tau_{\text{И}}}^{k\tau_{\text{И}}} \cos(\omega_0 \tau + \varphi_0) h(t - \tau) d\tau, & (v-1)\tau_{\text{И}} < t < v\tau_{\text{И}}, \quad 2 \leq v \leq L, \end{cases}$$

а помеховая составляющая –

$$n_{\text{пр}}(t) = \left( k_0 \frac{\Delta\omega}{\pi} \right) \times \int_0^t n(\tau) \text{sinc} \frac{\Delta\omega}{2} (t - \tau) \cos \omega_0 (t - \tau) d\tau.$$

Прием сигнала (1) в информационном канале СРС с ФМШПС осуществляется когерентным корреляционным приемником, выходной эффект которого пропорционален [3], [6]

$$M(\varepsilon, T) = \int_{\varepsilon_{\text{оп}}}^{T+\varepsilon_{\text{оп}}} x_{\text{пр}}(t) s_{\text{оп}}(t - \varepsilon_{\text{оп}}) dt,$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_0 - \varepsilon_{\text{оп}}$  – время задержки принимаемого сигнала относительно начала модулирующей ПСП опорного сигнала ( $\varepsilon_{\text{оп}}$  – время задержки опорного сигнала);

$$s_{\text{оп}}(t) = \sum_{k=1}^L p_k \text{rect} \left[ \frac{t - (k-1)\tau_{\text{И}}}{\tau_{\text{И}}} \right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

– опорный сигнал, формируемый при помощи системы фазовой автоподстройки частоты.

При приеме одного бита информации коррелятор формирует выходной эффект:

$$M(\varepsilon, T) = \int_{\varepsilon_{\text{оп}}}^{T+\varepsilon_{\text{оп}}} x_{\text{пр}}(t - \varepsilon_0) s_{\text{оп}}(t - \varepsilon_{\text{оп}}) dt = \int_0^T x_{\text{пр}}(t - \varepsilon) s_{\text{оп}}(t) dt = G(\varepsilon) + N,$$

где  $G(\varepsilon) = \int_0^T s_{\text{пр}}(t - \varepsilon) s_{\text{оп}}(t) dt$  – огибающая сигнала в области высокой корреляции ( $|\varepsilon| < \tau_{\text{И}}$ );

$$N = \frac{k_0 \Delta\omega}{2\pi} \sum_{k=1}^L p_k \int_{(k-1)\tau_{\text{И}}}^{k\tau_{\text{И}}} dt \times \int_0^t n(\tau) \text{sinc} \frac{\Delta\omega}{2} (t - \tau) \cos(\omega_0 \tau + \varphi_0) d\tau$$

– шумовая составляющая выходного эффекта, представляющая собой гауссовскую случайную величину с нулевым средним значением и дисперсией

$$\sigma_n^2 = \left( \frac{k_0 \Delta\omega}{\pi} \right)^2 \sum_{k=1}^L \sum_{v=1}^L p_k p_v \int_{(k-1)\tau_{\text{И}}}^{k\tau_{\text{И}}} dt_1 \int_{(v-1)\tau_{\text{И}}}^{v\tau_{\text{И}}} dt_2 \times \int_0^{t_1} n(\tau_1) \text{sinc} \frac{\Delta\omega}{2} (t_1 - \tau_1) \cos(\omega_0 \tau_1 + \varphi_0) d\tau_1 \times$$

$$\times \int_0^{t_2} n(\tau_2) \operatorname{sinc} \frac{\Delta \omega}{2} (t_2 - \tau_2) \cos(\omega_0 \tau_2 + \varphi_0) d\tau_2.$$

Используя подход, изложенный в [5], огибающую сигнальной составляющей представим в виде

$$G(\varepsilon) = \frac{k_0 L \tau_n a d}{2\pi} \hat{G}(\varepsilon),$$

где

$$\hat{G}(\varepsilon) = \begin{cases} (1-\hat{\varepsilon}) \int_0^{b(1-\hat{\varepsilon})} \sin(cx) dx + \frac{\cos b(1-\hat{\varepsilon}) - 1}{b}, & 0 < \hat{\varepsilon} < 1; \\ (1-\hat{\varepsilon}) \int_0^{b(1-\hat{\varepsilon})} \sin(cx) dx - 2\hat{\varepsilon} \int_0^{b\hat{\varepsilon}} \sin(cx) dx + \frac{1 - 2\cos(b\hat{\varepsilon}) + \cos b(1-\hat{\varepsilon})}{b}, & -1 < \hat{\varepsilon} < 0; \\ (1-\hat{\varepsilon}) \int_{-b\hat{\varepsilon}}^{b(1-\hat{\varepsilon})} \sin(cx) dx - (1+\gamma) \int_{-b\hat{\varepsilon}}^{-b(1+\hat{\varepsilon})} \sin(cx) dx + \frac{\cos b(1-\hat{\varepsilon}) + \cos b(1+\hat{\varepsilon}) - 2\cos(b\hat{\varepsilon})}{b}, & -1.2 < \hat{\varepsilon} < -1, \end{cases}$$

причем  $b/\pi = \Delta f / \Delta f_a = \Delta f \tau_n$  – ширина полосы пропускания полосового фильтра, нормированная на активную ширину спектра элементарного импульса;  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon / \tau_n$  – временная задержка принимаемого сигнала относительно начала ПСП опорного сигнала, нормированная на длительность элементарного импульса.

Дисперсию шумовой составляющей с использованием указанного подхода получим в виде

$$\sigma_n^2 = \frac{k_0^2 L N_0 \tau_n}{4\pi^2} \hat{\sigma}_n^2,$$

где

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{b} \left\{ bh^2 + 2\lambda \cos b - (\lambda + \lambda_1) + (\lambda_1 - h) \left( \cos b + 1 + \frac{\cos b - \cos 2b}{b} \right) - 2\lambda_1 (2\lambda + \lambda_1) - (\cos b + 1) \int_{2b}^{4b} \operatorname{sinc} x dx - 2 \sin b \int_0^{2b} \frac{\sin^2 x}{x} dx \right\},$$

причем  $\lambda = \int_0^b \operatorname{sinc} x dx$ ,  $\lambda_1 = \int_b^{2b} \operatorname{sinc} x dx$ .

Решающее устройство рассматриваемого приемника на основе сформированного эффекта  $M(\varepsilon, T)$  формирует результат

$$d = \begin{cases} 1, & M(\varepsilon, T) \geq 0; \\ -1, & M(\varepsilon, T) < 0. \end{cases}$$

В противных случаях принимаемые решения ошибочны.

Как известно [1]–[3], эффективность приема характеризуется СВО. Полагая априорные веро-

ятности решений  $d = 1$  и  $d = -1$  одинаковыми и равными 0.5, СВО определим как

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 W(M/d=1) dM + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} W(M/d=-1) dM, \quad (3)$$

где  $W(M/d=1)$  и  $W(M/d=-1)$  – плотности вероятностей значений выходного эффекта  $M(\varepsilon, T)$  при условии, что информационный символ принимает значения  $d = 1$  и  $d = -1$  соответственно.

Для нахождения плотностей вероятностей значений выходного эффекта приемника при различных значениях информационного символа воспользуемся методом характеристических функций. В рассмотренной задаче характеристическая функция определена как

$$\Theta(u) = \langle \exp(juM) \rangle_{a, \varphi, N} = \int_0^{\infty} da \int_{-\pi}^{\pi} W(a, \varphi_0) d\varphi_0 \times \int_{-\infty}^{\infty} W(N) \exp ju[G(\varepsilon) + N] dN. \quad (4)$$

В выражении (4) усреднение проводится по амплитуде ( $a$ ), фазе ( $\varphi_0$ ) и шумовой составляющей выходного эффекта ( $N$ ). После подстановки  $W(a, \varphi_0)$  (1) в (4) и ряда преобразований получим:

$$\Theta(u) = \exp \left[ -\frac{u^2 \sigma_n^2}{2} \right] \times \int_0^{\infty} da \frac{a}{\sigma_a^2} \exp \left[ -\frac{a^2 + a_0^2}{2\sigma_a^2} \right] I_0 \left( \frac{aa_0}{\sigma_a^2} \right) \exp[juadB], \quad (5)$$

где  $B = \frac{k_0 L \tau_n \hat{G}(\varepsilon)}{2\pi}$ .

На основании (5) найдем выражение для плотности вероятности выходного эффекта приемника:

$$W(M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_n} \int_0^\infty da \frac{a}{\sigma_a^2} \exp\left[-\frac{a^2 + a_0^2}{2\sigma_a^2}\right] \times \\ \times I_0\left(\frac{aa_0}{\sigma_a^2}\right) \exp\left[-\frac{(adB - M)^2}{2\sigma_n^2}\right].$$

Тогда выражение для СВО (2) примет вид

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \int_0^\infty x dx \exp\left[-\frac{x^2 + \gamma^2}{2}\right] \times \\ \times I_0(x\gamma) \left\{ 1 - \operatorname{erf}\left[x\sqrt{\frac{QH(\varepsilon, b)}{2}}\right] \right\}, \quad (6)$$

где  $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\pi} \int_0^x \exp(-t^2) dt$  – интеграл ошибок [7];

$Q = \sigma_a^2 L \tau_n / N_0$  – отношение сигнал/шум для флуктуирующей составляющей полезного сигнала;  $H(\varepsilon, b) = \hat{G}^2(\varepsilon, b) / \hat{\sigma}_n^2$ .

Введем  $\gamma = a_0 / \sigma_a$  – отношение регулярной составляющей амплитуды полезного сигнала к среднеквадратичному отклонению флуктуирующей составляющей. При превалировании регулярной составляющей ( $\gamma \gg 1$ ) в выражении (6) воспользуемся аппроксимацией

$$I_0(x\gamma) \approx \exp(x\gamma) / \sqrt{2\pi x\gamma}$$

и представлением [8]

$$\frac{x}{\sqrt{2\pi x\gamma}} \exp\left[-\frac{(x-\gamma)^2}{2}\right] \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\gamma)^2}{2}\right].$$

Тогда после ряда преобразований выражение для СВО (6) получит вид

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\gamma\sqrt{\frac{QH(\varepsilon, b)}{2}}\right).$$

Если регулярная составляющая амплитуды значительно меньше ее флуктуационной состав-

ляющей ( $\gamma \ll 1$ ), представив функцию Бесселя в виде ряда по переменной  $\gamma$ , выражение для СВО (6) можно записать как

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{QH(\varepsilon, b)}{1 + QH(\varepsilon, b)}} - \frac{\gamma^2}{4} \frac{\sqrt{QH(\varepsilon, b)}}{[1 + QH(\varepsilon, b)]^{3/2}} \right\}.$$

На рис. 1 и 2 представлены зависимости СВО оценивания значений информационного символа ФМШПС со случайной фазой и амплитудой, имеющей регулярную и флуктуационную составляющие, принимаемого на фоне внутренних шумов аппаратуры, от отношения сигнал/шум для флуктуирующей составляющей  $Q$  при различных значениях параметров, характеризующих соотношение регулярной и флуктуационной составляющих амплитуды  $\gamma = a_0 / \sigma_a$ . Зависимости на рис. 1 получены при отсутствии временной задержки принимаемого сигнала относительно опорного ( $\hat{\varepsilon} = \varepsilon / \tau_n = 0$ ), на рис. 2 – для нормированной задержки  $\hat{\varepsilon} = 0.3$ . Нормированная ширина полосы фильтра для зависимостей на обоих рисунках  $b/\pi = 1$ .

Из хода зависимостей на этих рисунках следует, что СВО оценивания значений информационных элементов ФМШПС, соответствующих одному биту информации, уменьшается с увеличением отношения сигнал/шум флуктуационной составляющей амплитуды сигнала, а также при опережении принимаемого сигнала опорным.

Для подробного исследования зависимости ошибки от взаимного сдвига сигналов на рис. 3 приведены зависимости  $P_{\text{ош}}(\hat{\varepsilon})$  при  $\gamma = 3$  и  $Q = 10$  для нескольких значений ширины полосы частот фильтра  $b/\pi$ . Из хода кривых следует, что минимальная вероятность ошибки достигается при некотором конечном времени опережения принимаемого сигнала относительно опорного. При этом время задержки, соответствующее минимуму  $P_{\text{ош}}$ , возрастает при уменьшении ширины полосы пропускания фильтра.

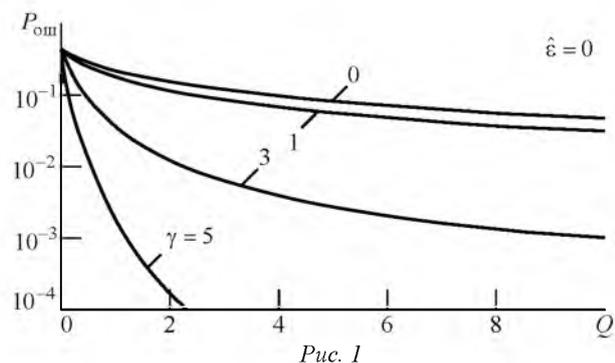


Рис. 1

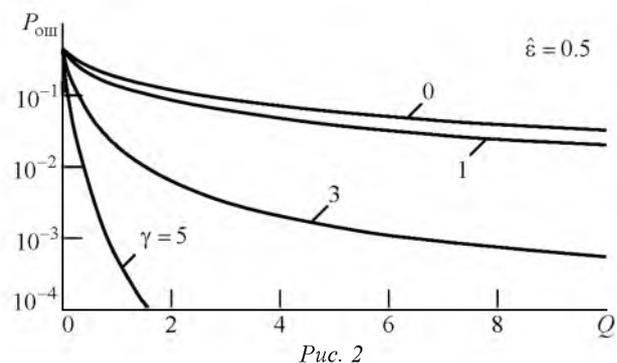
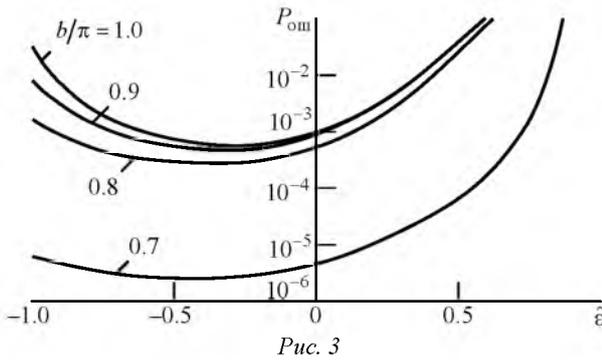


Рис. 2



Таким образом, в настоящей статье получены новые аналитические соотношения для СВО оценивания значений информационных символов, соответствующих биту переносимой информации

ФМШПС со случайной фазой и амплитудой, имеющей регулярную и флуктуационную составляющие, в условиях шумов аппаратуры с учетом искажений, вносимых входным полосовым фильтром. Проведен анализ эффективности оценивания значений информационных символов ФМШПС от отношения сигнал/шум, соотношения регулярной и флуктуационной составляющих амплитуды сигнала и полосы пропускания входного фильтра. Показано, что минимальная средняя вероятность ошибки достигается при временном запаздывании опорного сигнала относительно принимаемого. Причем временная задержка, соответствующая минимуму вероятности ошибки, зависит от ширины полосы пропускания входного фильтра.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варакин Л. Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Радио и связь, 1985. 384 с.
2. Помехозащищенность радиосистем со сложными сигналами / под ред. Г. И. Тузова. М.: Радио и связь, 1985. 264 с.
3. Помехозащищенность систем радиосвязи с расширением спектра сигналов модуляцией несущей псевдослучайной последовательностью / под ред. В. И. Борисова. М.: Радио и связь, 2003. 640 с.
4. Нахмансон Г. С., Стародубцева Е. А. Вероятность ошибки оценивания информационного символа в системах радиосвязи с фазоманипулированными широкополосными сигналами в условиях вза-

- имных помех // Радиотехника и электроника. 2013. № 2. С. 154–162.
5. Нахмансон Г. С., Бакаева Г. А. Обнаружение фазоманипулированного широкополосного сигнала на фоне шумов квадратурным приемником с входным полосовым фильтром // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2008. Т. 51, № 9. С. 20–29.
6. Витерби Э. Д. Принципы когерентной связи. М.: Сов. радио, 1970. 392 с.
7. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1964. 228 с.
8. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966. 678 с.

G. S. Nakhmanson

MSSC MAF "Military air academy n. a. prof. N. E. Jukovsky and Yu. A. Gagarin"

G. A. Bakaeva

Voronezh institute of the state firefighting service of Russia EMERCOM

### The information symbol estimation error probability in systems with phasemanipulated broadband signals, depending on their distortions in input circuits of the receiver

*The receiving of the phase manipulated broadband signal with the random initial phase and regular and fluctuated amplitude by the coherent correlative receiver against the background noise is considered. The information symbol values estimation mean error probability (MEP) expressions, taking into account distortions in receiver input circuits and synchronization noises are founded. The MEP dependences are analyzed as functions of the time delay value, signal/noise ratio, input filter bandwidth.*

Phase manipulated broadband signal, pseudo-random sequence, entrance band-pass filter, correlation receiver, error probability estimation of the information symbol

Статья поступила в редакцию 7 апреля 2014 г.