УДК 621.3.001

А. Г. Дерипаска, М. В. Соклакова, Э. П. Чернышев
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ"

Сравнение данных аналитических методов оценки устойчивости автоколебаний в релейных цепях и в системах второго порядка

Дается сравнительная оценка результатов аналитического расчета автоколебаний и анализа устойчивости методами, разработанными для симметричных автоколебаний с повторениями через полпериода и несимметричных с повторениями через период.

Релейная система, автоколебания, переходная характеристика, устойчивость, передаточная функция, дискретные цепи

В [1] предложен метод точного аналитического расчета автоколебаний (АК) в релейных цепях и системах (РЦС). В [2] изложены основы также аналитического метода оценки устойчивости симметричных АК в РЦС, который назван методом $M\tau$, поскольку переменные РЦС (сигналы на входе релейного элемента (РЭ))

$$x(t) = -x(t \pm \tau) \tag{1}$$

и на его выходе

$$y(t) = -y(t \pm \tau)) \tag{2}$$

симметрично повторяются через половину периода АК $\tau = T/2$, где T – период АК; t – время.

Для общего случая несимметричных АК, в которых (1), (2) несправедливы, методика $M\tau$ была модернизирована [3] и названа методом MT, поскольку АК приходится оценивать через период T.

Сравнительная оценка результатов расчета обоими методами для одинаковых условий (1) рассмотрена в настоящей статье.

Исходные данные. В качестве примера рассмотрим одноконтурную РЦС, в которой РЭ, описываемый как

$$y(t) = a\operatorname{sign}\left[x(t) + b\operatorname{sign} y(t)\right], \tag{3}$$

охвачен линейной частью (ЛЧ) с передаточной функцией (ПФ) второго порядка

$$H(s) = X(s)/Y(s) = -k/\left[(s+1)(s+\beta)\right], \tag{4}$$

где a, b – нормированные высота и ширина петли гистерезиса РЭ; s – оператор преобразования Лапласа; $X(s) \div x(t)$, $Y(s) \div y(t)$ – изображения по Лапласу сигналов на входе и на выходе РЭ ($\div$ – символ соответствия); k – статический коэффициент.

Для определенности в дальнейших численных расчетах принято:

$$a = b = 1,\ \ k = 4,\ \ s_1 = -1,\ \ s_2 = -\beta = -2, \tag{5}$$

где s_1, s_2 – полюсы ПФ.

АК считаем устойчивыми по Ляпунову [4], если выполняется условие

$$x_\xi(0) < \varepsilon \rightarrow x_\xi(t) \le \alpha(\varepsilon),\ \ t \to \infty, \tag{6}$$

которое трактуется следующим образом: если начальное значение вариации переменной $x_\xi(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$ меньше бесконечно малой ε, то конечное значение вариации не превысит бесконечно малой α, зависящей от ε ($\tilde{x}(t)$ – возмущенная координата системы, вызванная каким-либо возмущающим воздействием [4]).

Аналитический расчет АК в РЦС. Для модели РЦС, описанной формулами (1)–(4), используем методику расчета, изложенную в [1]. Предположим, что при $t < 0$ сигнал $y(t)$ отсутствовал. Тогда установившиеся симметричные АК в виде знакочередующихся прямоугольных импульсов на выходе РЭ на основании [5] имеют вид

$$y(t) = y_1(t) - \\ -y_1(t-\tau) + y_1(t-2\tau) - y_1(t-3\tau) + \ldots \div \\ \div Y(s) = Y_1(s)\big/\left(1+e^{-s\tau}\right) = \\ = \left(1-e^{-s\tau}\right)\big/\left[s\left(1+e^{-s\tau}\right)\right], \qquad (7)$$

где $Y_1(s)$ – преобразование Лапласа прямоугольного импульса $y_1(t)$ на выходе РЭ в интервале условного первого полупериода АК $0 < t < \tau = T/2$.

При этом изображение условно полного сигнала на выходе ЛЧ при $t \ge 0$ $\left(x_{\text{п}}(t) = 0 \text{ при } t < 0\right)$:

$$X_{\text{п}}(s) = H(s)Y(s) = \frac{H(s)}{s}\frac{1-e^{-s\tau}}{1+e^{-s\tau}} = \\ = X_{\text{св}}(s) + X_{\text{вын}}(s) = \left(\frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+\beta}\right) + \frac{X_1(s)}{1+e^{-s\tau}} = \\ = \sum \frac{A_i}{s-s_i} + \frac{X_1(s)}{1+e^{-s\tau}}, \qquad (8)$$

где $X_{\text{св}}(s)$, $X_{\text{вын}}(s)$ – условные свободная и вынужденная составляющие решения; A_i – коэффициенты разложения $X_{\text{св}}(s)$ на простейшие дроби по полюсам ПФ s_i; $X_1(s) = X(s)$ – искомое описание вынужденной составляющей периодических АК в интервале $0 < t < \tau$.

Коэффициенты разложения определяются следующим образом:

$$A_i = (s-s_i)X_{\text{п}}(s)\Big|_{s=s_i} = (s-s_i)H_1(s)\frac{1-e^{-s_i\tau}}{1+e^{-s_i\tau}}, \qquad (9)$$

где используемая согласно [5] в (8), (9) переходная характеристика (ПХ)

$$H_1(s) = H(s)/s = \\ = \frac{-k}{s(s+1)(s+\beta)} = \frac{B_0}{s} + \frac{B_1}{s+1} + \frac{B_2}{s+\beta} \div \\ \div h_1(t) = \left(B_0 + \sum B_i e^{s_i t}\right)\delta_1(t) \qquad (10)$$

– отображение переходной характеристики $h_1(t)$ [5].

Коэффициенты разложения $H_1(s)$ на простейшие дроби определяются формулами

$$B_i = (s-s_i)H_1(s)\Big|_{s=s_i}, \qquad (11)$$

где

$$B_0 = -k/\beta;\; B_1 = k/(\beta-1);\; B_2 = -k/\left[\beta(\beta-1)\right]. \qquad (12)$$

Из (8) с учетом (10) найдем искомое описание установившихся (вынужденных) АК $x(t) = x_1(t)$ при $0 < t < \tau$:

$$X_1(s) = \left[X_{\text{п}}(s) - \frac{A_1}{s+1} - \frac{A_2}{s+\beta}\right]\left(1+e^{-s\tau}\right) = \\ = H_1(s) - \frac{A_1}{s+1} - \frac{A_2}{s+\beta} \div \\ \div x_1(t) = x(t) = B_0 + \sum (B_i - A_i)e^{s_i t}, \qquad (13)$$

откуда с учетом (9) и (11) получим

$$B_i - A_i = B_i\left(1 - \frac{1-e^{-s_i\tau}}{1+e^{-s_i\tau}}\right) = \frac{2B_i}{1+e^{s_i\tau}}. \qquad (14)$$

Для описания полупериода АК необходимо учесть в (13) начальное переключение при $t = 0$ к уровню $y = +1$ в (7), т. е. необходимо с учетом (13), (14) решить уравнение

$$x(0) = 1 = B_0 + \frac{2B_1}{1+e^{s_1\tau}} + \frac{2B_2}{1+e^{s_2\tau}},$$

в котором коэффициенты определены согласно (12).

В рассматриваемом примере (5) получим $B_2 = -k/\left[\beta(\beta-1)\right]$ и

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{(\beta-1)\left(1+e^{-\tau}\right)} - \frac{2}{\beta(\beta-1)\left(1+e^{-\beta\tau}\right)}.$$

Полученное нелинейное функциональное уравнение при $k = 4$, $\beta = 2$ дает решение: $\tau = 1.837$ [1].

Обоснование возможности перехода к анализу дискретных цепей при оценке устойчивости АК в РЦС. При анализе устойчивости нелинейных цепей (а РЦС является ярко выраженным примером нелинейной цепи) согласно [4] обычно переходят к оценке поведения вариаций переменных цепи при мгновенном воздействии на цепь некоторого возмущающего воздействия типа дельта-функции $\delta(t)$.

Предположим, что при $t = 0$ под действием исчезающе малого возмущения [4] вида $\varepsilon\delta(t)$, площадь которого ε считаем бесконечно малой, произошло преждевременное срабатывание РЭ на бесконечно малое время Δt. Разность между "возмущенным" сигналом $\tilde{y}(t)$, полученным под воздействием возмущения, и исходным сигналом $y(t)$ является вариацией [4] последнего:

[1] Это же значение получено авторами настоящей статьи в монографии [6] несколько иным способом.

$$y_\xi(t)=\tilde{y}(t)-y(t). \qquad (15)$$

Вариация (15) согласно (3) при симметричных АК (1) фактически является периодической последовательностью знакопеременных коротких прямоугольных импульсов в моменты $t=n\tau$. Эти импульсы бесконечно малой площади приближенно можно описать дельта-функциями [5]

$$y_\xi(t)=2\Delta t_n\delta(t-n\tau), \qquad (16)$$

где коэффициент 2 определяется переключением РЭ от уровня "–1" к уровню "+1", а бесконечно малое время сдвига Δt_n момента n-го переключения можно приближенно найти по формуле

$$\Delta t_n=\left[\varepsilon\delta(t)+x_\xi(t)\right]/\dot{x}_0. \qquad (17)$$

Здесь $\dot{x}_0=\dot{x}(0)$ – скорость изменения сигнала на входе РЭ при $t=0^-$.

Таким образом, вариации переменных РЦС через каждый полупериод τ на основании (15)–(17) и (4) в моменты $t=n\tau$ приближенно описываются уравнениями вида

$$\begin{cases} y_\xi(t)=2\dot{x}_0^{-1}\left[\varepsilon\delta(t)+x_\xi(t)\right]; \\ X_\xi(s)=H(s)Y_\xi(s). \end{cases} \qquad (18)$$

Отметим следующее:

– из знакопеременности вариации $x_\xi(n\tau)$ в моменты переключения РЭ через каждую половину периода (при $t=n\tau$) вытекает знакопеременность импульсов (16);

– система (18) фактически описывает динамику РЦС в дискретные моменты времени $t=n\tau$, что позволяет осуществить переход от (18) к уравнениям дискретных цепей (ДЦ) и дискретным последовательностям сигналов [5]:

$$y_\xi(n\tau)=2\dot{x}_0^{-1}\left[\varepsilon\delta_0(n\tau)+x_\xi(n\tau)\right],$$

а затем использовать z-преобразование [5] уравнений ДЦ:

$$\begin{cases} Y_\xi(z)=2\dot{x}_0^{-1}\left[\varepsilon+X_\xi(z)\right]; \\ X_\xi(z)=H_д(z)Y_\xi(z), \end{cases} \qquad (19)$$

где $\delta_0(n\tau)\div F(z)=1$ – дискретная дельта-функция и ее z-преобразование соответственно; $H_д(z)$ – передаточная функция ДЦ, соответствующая ЛЧ РЦС.

Из (19) найдем ПФ замкнутой ДЦ:

$$H(z)=\frac{X_\xi(z)}{\varepsilon}=2\dot{x}_0^{-1}\frac{H_д(z)}{1-2\dot{x}_0^{-1}H_д(z)}. \qquad (20)$$

Для исследования устойчивости ДЦ найдем корни ее характеристического полинома (ХП) [5] – знаменателя ПФ (20):

$$P(z)=\dot{x}_0-2H_д(z)=0. \qquad (21)$$

Если корни z_i ХП (21)

$$|z_i|\le 1, \qquad (22)$$

то ДЦ устойчива, а следовательно, устойчивы и АК в РЦС, поскольку при выполнении (22) решение для вариаций согласно (20) будет

$$x_\xi(n\tau)=\sum D_i z_i^n\varepsilon, \qquad (23)$$

где D_i – коэффициенты разложения (20) на простейшие дроби [5] по полюсам z_i. Очевидно, что (23) при выполнении (22) полностью соответствует условию устойчивости по Ляпунову (6).

При анализе устойчивости РЦС через период АК (в методе *MT*) вид формул (15)–(23) сохраняется полностью при замене полупериода τ на период T.

Примечание. Используемое в формулах начальное значение скорости $\dot{x}_0=\dot{x}(0)$ определяется на основании (13), (14):

$$\dot{x}(0)=\sum s_i\left(A_i-B_i\right)=\sum 2B_i s_i/\left(1+e^{s_i\tau}\right). \qquad (24)$$

Анализ устойчивости по методу *M*τ. Наиболее просто ПФ ДЦ $H_д(z)$ определяется в методе $M\tau$ приравниванием импульсных характеристик (ИХ) $h(t)$ исходной аналоговой цепи и ДЦ в моменты $t=n\tau$:

$$h_д(n\tau)=h(t),\quad t=n\tau. \qquad (25)$$

На основании (10) имеем по формуле связи ИХ и ПХ [5]:

$$h(t)=h_1'(t)=\sum B_i s_i e^{s_i t}, \qquad (26)$$

что при $t=n\tau$ на основании (25) и [5] дает:

$$H_д(z)=\sum B_i s_i z/\left(z-e^{s_i\tau}\right). \qquad (27)$$

Подставив (24) и (27) в ХП (21), получим

$$P(z)=\sum\left(\frac{2B_i s_i}{1+e^{s_i\tau}}-\frac{2B_i s_i z}{z-e^{s_i\tau}}\right)=0. \qquad (28)$$

Уравнение (28) можно преобразовать к виду

$$\sum B_i s_i\frac{-e^{s_i\tau}-ze^{s_i\tau}}{\left(1+e^{s_i\tau}\right)\left(z-e^{s_i\tau}\right)}=$$
$$=\sum B_i s_i\frac{-z-1}{\left(1+e^{s_i\tau}\right)\left(z-e^{s_i\tau}\right)}=0. \qquad (29)$$

Из (29) следует, что первый корень ХП

$$z_1 = -1, \qquad (30)$$

что в соответствии с (23) отвечает "физике" периодического повторения вариаций АК.

Второй корень ХП отыскивается на основании (29) из уравнения

$$\sum \frac{B_i s_i}{\left(1+e^{-s_i\tau}\right)\left(z-e^{s_i\tau}\right)} = 0. \qquad (31)$$

Для рассматриваемого примера (5)

$$B_0 = -k/\beta,\ \ B_1 = k/(\beta-1),\ \ B_2 = -k/\left[\beta(\beta-1)\right].$$

Сократив k, из (31) получим:

$$\frac{-1}{(\beta-1)\left(1+e^{\tau}\right)\left(z-e^{-\tau}\right)} + \frac{\beta}{\beta(\beta-1)\left(1+e^{\beta\tau}\right)\left(z-e^{-\beta\tau}\right)} = 0. \qquad (32)$$

На основании (32) после преобразований находим второй корень ХП в методе $M\tau$:

$$z_{2_{M\tau}} = -e^{-\tau}e^{-\beta\tau},\ \ \left|z_{2_{M\tau}}\right| < 1. \qquad (33)$$

В рассматриваемом примере (33) дает

$$z_{2_{M\tau}} = -e^{-1.837}e^{-3.674} = -0.0040\ [2]. \qquad (34)$$

Главный вывод из (33), (34) состоит в том, что при любых вариантах ПФ (4) АК устойчивы, поскольку $\left|z_{2_{M\tau}}\right| < 1$.

Примечание. Из (32) также следует, что при использовании интегратора в цепи обратной связи РЦС (если в (4) $\beta \to 0$) устойчивость АК сохраняется при любых значениях k и τ.

Анализ устойчивости по методу *МТ*. Как указано в [3], при анализе устойчивости АК через период импульсная характеристика ДЦ в отличие от (25) формируется из четырех слагаемых:

– поскольку за время периода $0 < t < T$ происходит 2 переключения РЭ в различных направлениях со сдвигом на τ, то необходимо учитывать две ИХ: $h(nT)$ и $h(nT-\tau)$;

– кроме того в [3] показано, что необходимо вычесть начальные значения указанных составляющих (поскольку, как обосновано ранее, реальная вариация y_ξ – не дельта-функции, а прямоугольные импульсы, начальное значение реакции от которых в случае ПФ (4) равно нулю).

Таким образом, в отличие от (25) формула для формирования ИХ ДЦ имеет вид

$$h_{\text{Д}}(nT) = h(nT) - h(nT-\tau) - h(0) + h(-\tau).$$

С учетом (25)–(27) отсюда получим:

$$h_{\text{Д}}(nT) = \sum B_i s_i \Big[e^{s_i nT} - e^{s_i(nT-\tau)} - -1\cdot\delta_0(nT) + e^{-s_i\tau}\delta_0(nT)\Big].$$

Третье слагаемое в этом выражении может быть опущено, поскольку для ПФ типа (4) $\sum B_i s_i = 0$.

Таким образом, ПФ ДЦ по методу *МТ* согласно [5]:

$$H_{\text{Д}}(z) = \sum B_i s_i \left(\frac{z}{z-e^{s_iT}} - \frac{ze^{-s_i\tau}}{z-e^{s_iT}} + e^{-s_i\tau}\right). \qquad (35)$$

Использовав (24) и (35), запишем ХП (21):

$$P = \sum 2B_i s_i \left[\frac{1}{1+e^{s_i\tau}} - \frac{z\left(1-e^{-s_i\tau}\right)}{z-e^{s_iT}} - e^{-s_i\tau}\right] = \sum \frac{2B_i s_i(-z+1)e^{s_i\tau}}{\left(1+e^{s_i\tau}\right)\left(z-e^{s_iT}\right)} = 0. \qquad (36)$$

Один из корней ХП

$$z_1 = 1. \qquad (37)$$

Полученное значение отвечает процессу повторения АК через период T.

Второй корень ХП на основании (35) определяется из решения уравнения

$$\sum \frac{B_i s_i}{\left(1+e^{-s_i\tau}\right)\left(z-e^{s_iT}\right)} = 0. \qquad (38)$$

Для рассматриваемого примера (5)

$$B_0 = -k/\beta,\ \ B_1 = k/(\beta-1),\ \ B_2 = -k/\left[\beta(\beta-1)\right]$$

и (38) после сокращения k имеет вид

$$\frac{-1}{(\beta-1)\left(1+e^{\tau}\right)\left(z-e^{-T}\right)} + \frac{\beta}{\beta(\beta-1)\left(1+e^{\beta\tau}\right)\left(z-e^{-\beta T}\right)} = 0. \qquad (39)$$

Полученное выражение по форме аналогично выражению (32) в методе $M\tau$.

Преобразовав (39), найдем второй корень по методу *МТ*:

$$z_{2_{MT}} = \frac{\left(e^{-\beta T} + e^{-\beta\tau}\right) - \left(e^{-T} + e^{-\tau}\right)}{e^{\beta\tau} - e^{\tau}},$$

что в итоге дает

[2] Это же значение получено авторами настоящей статьи в монографии [6] несколько иным способом.

$$z_{2_{MT}} = e^{-\tau} e^{-\beta\tau} \left(e^{-\tau} + e^{-\beta\tau} + 1 \right). \qquad (40)$$

При подстановке в (40) численных значений примера $(\beta = 2,\ \tau = 1.837)$ получим:

$$z_{2_{MT}} = -0.0040\left(-e^{-1.837} + e^{-3.674} + 1 \right) = \\ = -0.0047. \qquad (41)$$

Таким образом, значения вторых корней по методам $M\tau$ (34) и MT (41) отличаются незначительно.

Главный результат представленной работы заключается в том, что получены простые аналитические формулы (13), (33), (40) для расчета АК и анализа их устойчивости в РЦС второго порядка.

Формулы (30) и (37) полностью соответствуют реализуемым на практике процессам повторяемости автоколебаний.

В то же время формулы (33) и (40) свидетельствуют о том, что метод анализа устойчивости $M\tau$ через половину периода АК обладает несколько большей сходимостью, чем метод анализа устойчивости MT через период $T = 2\tau$. Это объясняется меньшей инерционностью $M\tau$, по которому коррекция результата происходит в 2 раза, чем в методе MT. В то же время метод MT позволяет анализировать устойчивость несимметричных АК, что не доступно методу $M\tau$.

Кроме изложенных результатов следует учесть, что формулы (33) и (40) при $\beta \to 0$ позволяют перейти к важным для практики характеристикам РЦС с интегратором в цепи обратной связи системы. Это особенно важно для метода MT, где прямое исследование указанного варианта пока не дает результата.

Полученные формулы (13), (29), (36) позволяют провести сравнение методов, расчет и оценку устойчивости АК в РЦС любого порядка в случае некратных полюсов ПФ линейной части.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернышев Э. П., Мясоедов Г. Б., Ружников В. А. Метод точного расчета автоколебаний в электрических цепях, содержащих нелинейные элементы с релейной гистерезисной характеристикой // Изв. вузов. Электромеханика. 1987. № 11. С.125–127.

2. Ружников В. А., Силина М. В., Чернышев Э. П. Особенности проектирования устойчивых моделей автоколебательных радиоэлектронных и электротехнических систем // 5-й Междунар. симп. по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии, СПб., 16–19 сент. 2003. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2003. С. 250–253.

3. Силина А. Г., Соклакова М. В.,Чернышев Э. П. К разработке аналитических методов оценки устойчивости функционирования релейных автоколебательных электрорадиоэлектронных систем // 9-й Междунар. симп. по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии, СПб., 13–16 сент. 2011. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2011. С. 329–332.

4. Цыпкин Я. З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974. 576 с.

5. Бычков Ю. А., Золотницкий В. М., Чернышев Э. П. Основы теории электрических цепей. СПб.: Лань, 2002. 464 с.

6. Морозов Д. А., Соклакова М. В., Чернышев Э. П. Аналитический расчет релейных цепей и систем. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2012. 128 с.

A. G. Deripaska, M. V. Soklakova, E. P. Chernishev
Saint Petersburg state electrotechnical university "LETI"

A comparison of analytical methods to assess the stability of self-oscillations in relay circuits and systems

A comparative evaluation of the results of analytical calculation of the self-oscillations and stability analysis techniques is provided developed for symmetric self-oscillations with repetitions through halfperiod and asymmetric with repetitions through the period.

Relay system, self-oscillations, the transitive characteristic, stability, transfer function, discrete circuits

Статья поступила в редакцию 11 июня 2015 г.