УДК 621.396:681.323

С. И. Зиатдинов
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Синтез рекурсивных дискретных фильтров во временной области

Показано, что существующая методика расчетов коэффициентов разностного уравнения рекурсивных дискретных фильтров на базе отсчетов импульсной характеристики не обеспечивает правильной реализации переходных процессов. Предложена методика расчетов коэффициентов с использованием отсчетов переходной характеристики, которая позволяет получить динамические свойства дискретных фильтров, совпадающие с динамическими свойствами непрерывных фильтров как в переходном, так и в установившемся режимах.

Частотная передаточная функция, импульсная характеристика, переходная характеристика, рекурсивные дискретные фильтры, разностные уравнения, коэффициенты

При обработке сигналов применяются разнообразные фильтры, с помощью которых решаются задачи фильтрации, дифференцирования, интегрирования, экстраполяции и т. д. В каждом конкретном случае фильтр должен обладать определенными частотными свойствами.

В современных условиях широко распространены цифровые методы обработки на базе персональных компьютеров или специализированных вычислителей, предусматривающие использование дискретных фильтров. В настоящее время достаточно хорошо отработана методика синтеза дискретных фильтров по их непрерывным аналогам.

Можно выделить 2 основных метода синтеза дискретных фильтров: синтез в частотной области и синтез во временно́й области. При синтезе дискретных фильтров в частотной области [1] должны воспроизводиться амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и фазочастотные характеристики (ФЧХ) непрерывных фильтров с минимальными погрешностями. Преобразование частотной передаточной функции непрерывного фильтра в частотную передаточную функцию дискретного фильтра осуществляется на базе билинейного преобразования, которое используется для создания в основном фильтров верхних частот и режекторных фильтров.

В случае синтеза дискретных фильтров во временно́й области применяется метод инвариантной импульсной характеристики (ИХ), при котором отсчеты ИХ непрерывного фильтра используются для определения коэффициентов линейного разностного уравнения дискретного фильтра.

В общем виде частотная передаточная функция дискретного фильтра в z-плоскости записывается в виде [2]

$$W(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n} b_i z^{-i}},$$

где a_i, b_i – постоянные коэффициенты; n – порядок передаточной функции.

Данному соотношению соответствует разностное уравнение, определяющее алгоритм работы дискретного фильтра:

$$y(k) = a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + \ldots + a_n x(k-n) - b_1 y(k-1) - b_2 y(k-2) - \ldots - b_n y(k-n) = \sum_{i=0}^{n} a_i x(k-i) - \sum_{i=1}^{n} b_i y(k-i), \quad (1)$$

где $y(k)$, $x(k)$ – отсчеты выходного и входного сигналов дискретного фильтра соответственно.

Синтез дискретного фильтра при заданном порядке n заключается в выборе коэффициентов a_i и b_i таким образом, чтобы динамические свойства дискретного и непрерывного фильтров максимально совпадали.

При синтезе дискретных фильтров во временной области ИХ представляется последовательностью масштабированных отсчетов непрерывной ИХ $h_i = Th(t_i)$, где $t_i = iT$, T – период следования отсчетов входных и выходных сигналов фильтра. При этом коэффициенты разностного уравнения (1) определяются следующим образом [1], [3]:

$$a_0 = h_0;\ a_k = h_k + \sum_{i=1}^{k} b_i h_{k-i}; \tag{2}$$

$$-\sum_{i=1}^{n} b_i h_{n+k-i} = h_{n+k},\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

По системе n линейных уравнений (3) находятся коэффициенты b_i. Коэффициенты a_i рассчитываются последовательно по формуле (2).

Покажем, что в общем случае вычисление коэффициентов разностного уравнения по известной методике является недостаточно точным и не отражает истинные физические процессы, протекающие в дискретных фильтрах.

В качестве примера рассмотрим фильтр нижних частот (ФНЧ) Баттерворта первого порядка, для которого частотная передаточная функция, импульсная и переходная характеристики (ПХ) соответственно определяются выражениями [1]:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_{\text{ср}}};$$
$$h(t) = \omega_{\text{ср}} e^{-\omega_{\text{ср}} t}; \tag{4}$$
$$g(t) = 1 - e^{-\omega_{\text{ср}} t},$$

где $\omega_{\text{ср}}$ – частота среза.

При этом в соответствии с (2) и (3) коэффициенты разностного уравнения будут иметь вид

$$a_0 = h_0;\ a_1 = h_1 - (h_2/h_1)h_0;\ b_1 = -h_2/h_1$$

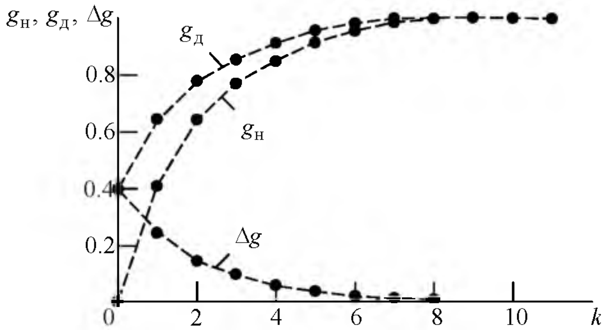
или с учетом (4)

$$a_0 = \omega_{\text{ср}} T;\ a_1 = 0;\ b_1 = -e^{-\omega_{\text{ср}} T}.$$

В соответствии с (1) разностное уравнение рассматриваемого дискретного фильтра имеет вид

$$y(k) = a_0 x(k) - b_1 y(k-1). \tag{5}$$

Синтезированный рекурсивный дискретный фильтр должен по своим параметрам соответствовать непрерывному фильтру, т. е. ПХ дискретного фильтра должна максимально точно равняться отсчетам ПХ непрерывного фильтра в дискретные моменты времени $t_i = iT$. Запишем согласно (5) ПХ синтезируемого дискретного



фильтра как его реакцию на решетчатое единичное входное воздействие в виде

$$g_{\text{д}}(k) = a_0 - b_1 g_{\text{д}}(k-1).$$

На рисунке показаны приведенные к уровню единицы ПХ рассматриваемого непрерывного ФНЧ $g_{\text{н}}(k)$ и дискретного ФНЧ $g_{\text{д}}(k)$ для случая $T\omega_{\text{ср}} = 0.5$. Здесь же представлено отклонение ПХ этих характеристик:

$$\Delta g(k) = g_{\text{д}}(k) - g_{\text{н}}(k).$$

Анализируя представленные результаты расчетов, следует отметить, что для ФНЧ первого порядка на протяжении длительности переходного процесса $t_{\text{пер}} \approx 8T$ отклонение ПХ дискретного и непрерывного фильтров изменяется от 40 % практически до нуля по отношению к установившемуся значению $g_{\text{н}}(\infty) = 1$. Расчеты, проведенные для ФНЧ Баттерворта второго порядка, показали, что отклонение ПХ дискретного и непрерывного фильтров составляет 10 %.

Таким образом, существующая методика определения коэффициентов разностного уравнения рекурсивных фильтров на базе отсчетов ИХ является неточной и в результате не обеспечивает требуемого качества работы дискретных фильтров в пределах переходного процесса. Известной методикой можно пользоваться лишь за пределами переходного процесса.

В полном объеме физические процессы, протекающие как в непрерывных, так и в дискретных фильтрах, описываются их ПХ. В связи с этим рассмотрим синтез рекурсивных дискретных фильтров на базе их ПХ. На основании (1) для случая ПХ, когда $x(i) = 1$, запишем систему разностных уравнений, связывающих значения отсчетов входного и выходного сигналов рекурсивного дискретного фильтра, а также коэффициентов a_i и b_i:

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{i=0}^{n} a_i x(k) - \sum_{i=1}^{n} b_i y(k-i), \\ g_{\text{д}}(k) &= \sum_{i=0}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i g_{\text{д}}(k-i). \end{aligned} \tag{6}$$

При этом для синтеза дискретного рекурсивного фильтра отсчеты $g_{д}(k)$ ПХ дискретного фильтра приравниваются к отсчетам $g_{н}(k)$ переходной характеристики непрерывного фильтра: $g_{д}(k) = g_{н}(k)$.

В развернутом виде система уравнений (6) записывается следующим образом:

$$\begin{gathered}
a_1 + a_2 + \ldots + a_n - b_1 g_{д}(k-1) - b_2 g_{д}(k-2) - \\
- \ldots - b_n g_{д}(0) = g_{д}(k) - g_{д}(0); \\
a_1 + a_2 + \ldots + a_n - b_1 g_{д}(k) - b_2 g_{д}(k-1) - \\
- \ldots - b_n g_{д}(1) = g_{д}(k+1) - g_{д}(0); \\
a_1 + a_2 + \ldots + a_n - b_1 g_{д}(k+1) - b_2 g_{д}(k) - \\
- \ldots - b_n g_{д}(2) = g_{д}(k+2) - g_{д}(0); \\
\vdots \\
a_1 + a_2 + \ldots + a_n - b_1 g_{д}(k+m-2) - \\
- \ldots - b_n g_{д}(m-1) = g_{д}(k+m-1) - g_{д}(0).
\end{gathered} \tag{7}$$

Число уравнений в данной системе должно быть равно числу неизвестных коэффициентов $m = 2n$.

Решение полученной системы уравнений позволяет определить все необходимые коэффициенты разностного уравнения синтезируемого рекурсивного дискретного фильтра. Для этого перепишем систему уравнений (7) в виде

$$\begin{gathered}
x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} g_{д}(k-1) + \\
+ x_{n+2} g_{д}(k-2) + \ldots + x_{2n} g_{д}(0) = d_1; \\
x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} g_{д}(k) + \\
+ x_{n+2} g_{д}(k-1) + \ldots + x_{2n} g_{д}(1) = d_2; \\
\vdots \\
x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} g_{д}(k+m-2) + \\
+ x_{n+2} g_{д}(k+m-3) + \ldots + x_{2n} g_{д}(m-1) = d_m,
\end{gathered} \tag{8}$$

где

$$\begin{gathered}
x_1 = a_1;\ x_2 = a_2;\ \ldots;\ x_n = a_n; \\
x_{n+1} = -b_1;\ x_{n+2} = -b_2;\ \ldots;\ x_{2n} = -b_n; \\
d_1 = g_{д}(k) - g_{д}(0);\ d_2 = g_{д}(k+1) - g_{д}(0); \\
\ldots;\ d_m = g_{д}(k+m-1) - g_{д}(0).
\end{gathered}$$

Система уравнений (8) решается в приложении Matlab с помощью функции $x = \mathrm{prinv}(A) * \mathrm{d}$, где A является матрицей вида

$$A = \begin{pmatrix} 1\ 1 \ldots 1 & g_{д}(k-1) & g_{д}(k-2) & \ldots & g_{д}(0) \\ 1\ 1 \ldots 1 & g_{д}(k) & g_{д}(k-1) & \ldots & g_{д}(1) \\ \ldots 1 \ldots 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1\ 1 \ldots 1 & g_{д}(k+m-2) & g_{д}(k+m-3) & \ldots & g_{д}(m-1) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Правая часть системы уравнений (8) определяет вектор-столбец

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \ldots & d_m \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{10}$$

Рассмотрим ряд примеров.

1. Фильтр верхних частот (ФВЧ) первого порядка. В непрерывном варианте данный фильтр обладает частотной передаточной функцией

$$W(j\omega) = \frac{j\omega / \omega_{ср}}{1 + j\omega / \omega_{ср}}$$

и ПХ $g(t) = e^{-\omega_{ср} t}$.

Согласно (9) и (10) матрица A и вектор-столбец $\mathbf{d}$ записываются в виде

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & g_{д}(1) \end{pmatrix};\quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} g_{д}(1) - 1 \\ g_{д}(2) - 1 \end{pmatrix}.$$

При этом для рассматриваемого ФВЧ при $T\omega_{ср} = 0.5$ коэффициенты разностного уравнения принимают значения

$$a_0 = 1;\quad a_1 = -1;\quad b_1 = -0.60653066.$$

Расчеты показывают, что в данном случае отклонение ПХ дискретного и непрерывного ФВЧ не превышает 10^{-13}.

2. ФНЧ Баттерворта первого порядка. Для рассматриваемого фильтра ПХ определяется формулами:

– для непрерывного фильтра $g_{н}(t) = 1 - e^{\frac{-\omega_{ср} t}{\sqrt{2}}}$;

– для дискретного фильтра $g_{д}(i) = 1 - e^{\frac{-\omega_{ср} iT}{\sqrt{2}}}$.

Матрица A и вектор-столбец $\mathbf{d}$ записываются следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & g_{д}(1) \end{pmatrix};\quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} g_{д}(1) \\ g_{д}(2) \end{pmatrix}.$$

В результате для рекурсивного дискретного ФНЧ первого порядка при $T\omega_{ср} = 0.5$ коэффициенты разностного уравнения составляют: $a_0 = 0$; $a_1 = 0.39346934$; $b_1 = -0.60653066$. Как и в случае с ФВЧ первого порядка, отклонение ПХ дискретного и непрерывного ФНЧ первого порядка не превышает 10^{-13}.

3. ФНЧ Баттерворта второго порядка. Для непрерывного времени ПХ этого ФНЧ имеет вид

$$g_{н}(t) = 1 - e^{-\omega_{ср} t / \sqrt{2}} \left[\sin\left(\omega_{ср} t / \sqrt{2}\right) + \cos\left(\omega_{ср} t / \sqrt{2}\right) \right],$$

а для дискретного времени –

$$g_{д}(i) = 1 - e^{-\omega_{ср} iT / \sqrt{2}} \times$$
$$\times \left[\sin\left(\omega_{ср} iT / \sqrt{2}\right) + \cos\left(\omega_{ср} iT / \sqrt{2}\right) \right].$$

Матрица A и вектор-столбец $\mathbf{d}$ приобретают вид

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & g_д(1) & g_д(0)\\ 1 & 1 & g_д(2) & g_д(1)\\ 1 & 1 & g_д(3) & g_д(2)\\ 1 & 1 & g_д(4) & g_д(3)\end{pmatrix};\ \mathbf{d}=\begin{pmatrix}g_д(2)-g_д(0)\\ g_д(3)-g_д(0)\\ g_д(4)-g_д(0)\\ g_д(5)-g_д(0)\end{pmatrix}.$$

Для рассматриваемого ФНЧ коэффициенты разностного уравнения при $T\omega_{ср}=0.5$ принимают значения:

$$a_0=0;\ a_1=0.09126395;\ a_2=0.09126395;$$
$$b_1=-1.30224374;\ b_2=0.48477164.$$

В данном случае отклонение ПХ дискретного и непрерывного ФНЧ второго порядка не превышает 0.05 %.

4. ФНЧ Баттерворта третьего порядка. Непрерывная ПХ этого фильтра имеет вид

$$g_н(t)=1-e^{-\omega_{ср}t}-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-0.5\omega_{ср}t}\sin\left(0.5\sqrt{3}\omega_{ср}t\right),$$

а его дискретная ПХ –

$$g_н(i)=1-e^{-\omega_{ср}iT}-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-0.5\omega_{ср}iT}\sin\left(0.5\sqrt{3}\omega_{ср}iT\right).$$

Матрица A и вектор-столбец $\mathbf{d}$ записываются следующим образом:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & g_д(2) & g_д(1) & g_д(0)\\ 1 & 1 & 1 & g_д(3) & g_д(2) & g_д(1)\\ 1 & 1 & 1 & g_д(4) & g_д(3) & g_д(2)\\ 1 & 1 & 1 & g_д(5) & g_д(4) & g_д(3)\\ 1 & 1 & 1 & g_д(6) & g_д(5) & g_д(4)\\ 1 & 1 & 1 & g_д(7) & g_д(6) & g_д(5)\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{d}=\begin{pmatrix}g_д(3)-g_д(0)\\ g_д(4)-g_д(0)\\ g_д(5)-g_д(0)\\ g_д(6)-g_д(0)\\ g_д(7)-g_д(0)\\ g_д(8)-g_д(0)\end{pmatrix}.$$

При этом коэффициенты разностного уравнения составляют:

$$a_0=0;\ a_1=0.02578019;\ a_2=0.02578019;$$
$$a_3=0.02578019;\ b_1=-2.01286036;$$
$$b_2=1.45514907;\ b_3=-0.36494815.$$

При указанных значениях отклонение ПХ дискретного и непрерывного ФНЧ третьего порядка не превышает 0.25 %.

Следует отметить, что с уменьшением произведения $T\omega_{ср}$ отклонение ПХ дискретных и непрерывных фильтров как нижних, так и верхних частот резко уменьшается.

Таким образом, показано, что известная методика расчетов коэффициентов разностного уравнения рекурсивных дискретных фильтров на базе отсчетов ИХ не обеспечивает правильной реализации переходных процессов. Предложенная методика расчетов коэффициентов с использованием отсчетов ПХ позволяет получить дискретные фильтры с динамическими свойствами, совпадающими с динамическими свойствами непрерывных фильтров как в переходном, так и в установившемся режимах.

Предложенная методика является общей и распространяется на рекурсивные дискретные фильтры как нижних, так и верхних частот практически любых порядков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев С. Н. Цифровая обработка сигналов. М.: Академия, 2013. 318 с.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Мир цифровой обработки сигналов. М.: Техносфера, 2006. 820 с.
3. Куприянов М. С., Матюшкин Б. Д. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Политехника, 2000. 592 с.

S. I. Ziatdinov

Saint Petersburg State University of the Aerospace Instrumentation

Synthesis of the Recursive Discrete Filters in Time Range

It was showed, that the methods, which is used in real time for calculation the coefficients of the difference equation for recursive discrete filters on the base of the readings of impulse characteristic not gives correct the transient process. It was proposed the methods for calculation the coefficients on the base of the readings of transient characteristic, which gives correct dynamical properties of the discrete filters, coincidental with the dynamical properties of the filters unbroken filters as in transient, like that in steady condition.

Frequency transmission function, impulse characteristic, transient characteristic, recursive discrete filters, difference equations, coefficients

Статья поступила в редакцию 15 февраля 2016 г.