



УДК 621.391.8

А. П. Лось

Научно-исследовательский институт кораблестроения и вооружения ВМФ  
(Санкт-Петербург)

А. К. Розов, А. Н. Царапкин

Военно-морская академия (Санкт-Петербург)

## Оптимальное правило обнаружения сигналов, возникающих в случайные моменты времени

*На основании теории оптимальных правил остановки наблюдений разработаны алгоритмы обнаружения, обладающие наибольшим выигрышем. Показаны сложности нахождения оптимальных решающих процедур. Сформулированы и доказаны две теоремы о составлении стохастических дифференциальных уравнений. Приведены примеры возможного применения разработанной теории для дискретного и непрерывного времени.*

**Оптимальное правило остановки, обнаружение сигналов, потери, наибольший выигрыш, вероятность, дифференциальные уравнения**

Настоящая статья является продолжением ранее опубликованной работы [1]. В отличие от [1], где принимаемый сигнал полагался существующим в течение всего промежутка анализа, в настоящей статье анализируется прием сигнала, возникающего в процессе наблюдения, причем момент его возникновения случаен. Принятая модель существенно усложняет задачу, поскольку требует составления и анализа не одного уравнения, а их системы.

В прикладном плане вывод уравнений, составляющих основу алгоритма обнаружения, важен для приложений, направленных на обнаружение слабых сигналов. Поскольку решение полученных уравнений возможно лишь численными методами, ЭВМ должна обладать большим быстродействием, позволяющим решать уравнения в реальном времени.

В теоретическом плане в настоящей статье на основании положений теории об оптимальных правилах остановки наблюдений составлены алгоритмы обнаружения, которые могут считаться наилучшими среди всех возможных. К новым теоретическим положениям, представленным в статье, можно отнести:

– процесс получения наилучших алгоритмов обнаружения на основании оптимальных правил остановки;

– доказательство двух теорем о составлении стохастических дифференциальных уравнений, предполагающее представление сигнала слагаемыми, имеющими порядок малости  $\Delta$ , и помехи в виде приращений винеровского процесса, имеющих порядок малости  $\sqrt{\Delta}$ , а также учитывающее квадратичный член разложения отношения правдоподобия в ряд;

– вывод уравнения, представляющего границу области остановки наблюдений, позволяющего с помощью стохастического моделирования находить эту границу с необходимой точностью.

В начале настоящей статьи задача обнаружения решена на наборе дискретных временных отсчетов. При этом использован аппарат случайных величин. Далее полученный результат распространен на случай непрерывного представления времени с использованием для этого стохастических дифференциальных уравнений.

**Дискретные измерения.** Для дискретного времени наблюдаемое воздействие задается последовательностью случайных величин, которые в моменты времени  $n < \theta$ ,  $n > \theta$  имеют плотность распределения  $f_0$ , а в момент  $n = \theta$  – плотность распределения  $f_1$  ( $\theta$  – момент появления сигнала).

В теории оптимальных правил остановки [2], [3] доказывается существование наибольшего выигрыша:

$$U_1^N = M g_v = \sup_{t \in [1, N]} M g_t, \quad (1)$$

где  $U_1^N$  – выигрыш на интервале наблюдения  $t \in [1, N]$  ( $N$  – отсчет, на котором заканчивается наблюдение);  $M$  – символ математического ожидания;  $g_v$  – выигрыш в момент  $v$  ( $v$  – случайный момент остановки наблюдения);  $g_t$  – выигрыш в момент  $t$ .

Для достижения выигрыша (1) момент остановки наблюдения  $v$  должен отвечать условию регулярности  $g_n < M g_v$ ,  $v > n$ , и наступать, когда  $v = \min \{g_n = U_n^N\}$ ,  $n = 1, \dots, N$ .

Такое условие эквивалентно принятию решения о поступлении сигнала в момент достижения статистикой  $g_n$  границы области остановки.

Возможны два варианта нахождения границы – байесовский и модифицированный байесовский.

**Байесовский вариант.** Нахождение границы зависит от вида последовательности  $(g_n, \sigma_n)$ , где  $\sigma_n = (\pi_n, \eta_n)$  – наблюдаемые воздействия, причем  $\pi_n = \pi(a_1, \dots, a_n)$  – апостериорная вероятность  $(a_1, \dots, a_n$  – скрытые параметры);  $\eta_n$  – выигрыш в момент  $n$ .

С помощью последовательности  $(g_n, \sigma_n)$  может быть учтена зависимость процедуры вычисления от вида последовательностей, представляющих эволюцию выигрышей во времени.

Если последовательность  $(g_n, \sigma_n)$  можно сузить до последовательности марковских случайных функций, то составление оптимальных правил остановки возможно аналитически. Такую возможность использовал А. Н. Ширяев, которому удалось получить ряд ставших широко известными результатов [4].

Примером может послужить обнаружение разладки (нарушения вероятностных характеристик процесса) в момент  $\theta$ , представляемое процессом:

$$\chi_n = \begin{cases} 0, & n < \theta; \\ r, & n \geq \theta, \end{cases} \quad (2)$$

где  $r$  – амплитуда разладки.

Распределение момента  $\theta$  имеет вид

$$P(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < 1; \\ (1 - \varepsilon) \varepsilon^{(\theta-1)}, & \theta \geq 1, \end{cases}$$

где  $\varepsilon$  – параметр распределения.

Процесс  $\chi_n$  будет марковским. Марковской будет и последовательность  $\sigma_n = (\pi_n, \eta_n)$ , а вместе с ней сама последовательность выигрышей  $(g_n, \sigma_n)$ .

Если же последовательность  $(g_n, \sigma_n)$  отличается от марковской (что на практике встречается весьма часто), возникают трудности в решении задачи.

Примером такой ситуации является рассматриваемый в настоящей статье случай обнаружения сигнала в момент  $n$ , представляемый процессом (2), при условии, что величина  $\theta$  распределена равномерно на  $[1, N]$ :

$$P(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < 1; \\ 1/N, & \theta \in [1, N]. \end{cases}$$

При этом процесс  $\chi_n$  будет немарковским, немарковской будет  $\sigma_n$  и последовательность выигрышей  $(g_n, \sigma_n)$ .

Обратимся к представлению последовательности  $(g_n, \sigma_n)$  более обобщенным процессом, не требующим знания переходных вероятностей (как в марковском процессе) и позволяющим довольствоваться лишь выполнением условия  $M(g_{n+1} | \sigma_n) \leq g_n$ . Такому условию удовлетворяет процесс типа мартингал, а точнее – процесс, представляемый наименьшим супермартингалом [2], однако его применение не дает аналитического решения задачи. Все же, как показал Снелл [5], может быть составлено рекуррентное соотношение

$$U_1^N = \max \left\{ g_n, M[U_{n+1}^N(\sigma_n)] \right\}, \quad (3)$$

которое вместе с условием  $v = \min \{n : g_n = U_n^N\}$  означает, что остановка должна происходить тогда, когда в процессе наблюдения максимум в (3) окажется равным  $g_n$ .

Таким образом, наблюдения должны прекращаться в случайный момент  $v$ , когда  $g_n$ , возрасшая, сравняется с  $M[U_{n+1}^N(\sigma_n)]$  – вероятностью правильного принятия решений на интервале  $[n+1, N]$ , т. е.  $P_{\theta > n}(v = \theta | \eta_1^n)$ ,  $\eta_1^n = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ . Значения  $g_n$  находятся статистическим моделированием в результате сравнения рекуррентно вычисленных значений выигрышей  $\pi_n^{(0)} = P(\theta | \eta_1^n)$ <sup>1</sup> с границей на интервале  $[n+1, N]$ .

<sup>1</sup> Верхний индекс в обозначениях выигрышей отражает момент окончания наблюдений:  $(\theta)$  – окончание наблюдения в момент появления сигнала  $\theta$ ;  $(-)$  – окончание наблюдения после появления сигнала  $\theta$ ;  $(+)$  – окончание наблюдения до появления сигнала  $\theta$ .

Приравнивая выигрыш от остановки  $g_n = \pi_n^{(0)}$  ожидаемому выигрышу от продолжения наблюдения  $P_{\theta > n}[(v = \theta) | \eta_1^n]$ , получим уравнение

$$\pi_n^{(0)} = P_{\theta > n}[(v = \theta) | \eta_1^n].$$

Решение данного уравнения методом обратной индукции позволяет определить границу  $\pi_n^{(0)}$  как корень уравнения. Аналогичная процедура выполняется при нахождении границы для моментов  $n-1, n-2, \dots$ . В результате использования метода обратной индукции могут быть найдены все значения границы на  $[1, N]$ .

**Модифицированный байесовский вариант** предполагает, что после момента  $n$  не будет добавления информации и что решение о продолжении наблюдений будет основываться лишь на наблюдениях, заканчивающихся в момент  $n$ . Такое предположение соответствует равенству

$$\pi_n^{(0)} = \pi_n^{(+)} = 1 - \pi_n = 1 - P[(\theta \leq n) | \eta_1^n],$$

где  $\pi_n^{(+)} = P[(\theta > n) | \eta_1^n]$ ;  $\pi_n = P[(\theta \leq n) | \eta_1^n]$ .

Если ввести статистику  $\Omega_n = \pi_n^{(0)} + \pi_n$ , то граница может быть определена как  $\hat{\Omega}_n = \Omega = 1$ . Моделирование показало, что в действительности  $\hat{\Omega}$  несколько меньше единицы (в пределах от 0.95 до 1.0).

**Рекуррентные соотношения.** Реализация правил остановки предполагает последовательное во времени нахождение апостериорных вероятностей  $\pi_n^{(-)}$  и  $\pi_n^{(0)}$  с помощью рекуррентных соотношений  $\pi_n^{(-)} = 1 - \pi_n^{(0)} - \pi_n^{(+)}$ .

В составлении указанных соотношений важную роль играет выражение для апостериорной вероятности появления сигнала в момент  $\theta$  по наблюдениям  $\eta_1^n = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ :

$$\begin{aligned} P(\theta | \eta_1^n) &= \frac{d(\eta_1^n | \theta) P(\theta)}{dP(\eta_1^n)} \frac{P[(\theta > n) | \eta_1^n]}{P[(\theta > n) | \eta_1^n]} = \\ &= \frac{d(\eta_1^n | \theta) P(\theta)}{dP(\eta_1^n)} (1 - \pi_n) \frac{P(\theta)}{P(\theta > n)} = \\ &= \begin{cases} \Phi_\theta \frac{1 - \pi_n}{P(\theta > n)} P(\theta), & \theta \leq n; \\ \frac{1 - \pi_n}{P(\theta > n)} P(\theta), & \theta > n, \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$\Phi_\theta = \frac{d(\eta_1^n | \theta)}{dP[\eta_1^n | (\theta > n)]}$$

– отношение правдоподобия [6], [7].

Исходным моментом в составлении рекуррентных соотношений является формула Байеса. В соответствии с этой формулой статистика может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \pi_{n+1} &= P[(\theta \leq n+1) | \eta_1^{n+1}] = \\ &= P[(\theta \leq n) | \eta_1^{n+1}] + P[(n+1) | \eta_1^{n+1}] = \\ &= P[(\theta \leq n) | \eta_1^n, \eta_{n+1}] + P[(n+1) | \eta_1^n, \eta_{n+1}] = \\ &= \frac{1}{f(\eta_{n+1} | \eta_1^n)} \left\{ P[(\theta \leq n) | \eta_1^n, \eta_{n+1}] f(\eta_{n+1} | \eta_1^n) + \right. \\ &\quad \left. + P[(n+1) | \eta_1^n, \eta_{n+1}] f(\eta_{n+1} | \eta_1^n) \right\} = \\ &= \frac{1}{f(\eta_{n+1} | \eta_1^n)} \left\{ P[(\theta \leq n) | \eta_1^n] f[\eta_{n+1} | (\theta \leq n), \eta_1^n] + \right. \\ &\quad \left. + P[(n+1) | \eta_1^n] f[\eta_{n+1} | (n+1), \eta_1^n] \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку при фиксированной реализации  $\eta_1^n$  событие, состоящее в наступлении случайной величины  $\eta_{n+1}$ , может сочетаться с одним из событий  $\theta \leq n, \theta = n+1$  или  $\theta > n+1$ , составляющих полную группу событий, плотность распределения  $f(\eta_{n+1} | \eta_1^n)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(\eta_{n+1} | \eta_1^n) &= P[(\theta \leq n) | \eta_1^n] f[\eta_{n+1} | (\theta \leq n), \eta_1^n] + \\ &\quad + P[(n+1) | \eta_1^n] f[\eta_{n+1} | (n+1), \eta_1^n] + \\ &\quad + P\{[\theta \leq (n+1)] | \eta_1^n\} f[\eta_{n+1} | (\theta > n+1), \eta_1^n]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\pi_{n+1} = \frac{A(n, n+1) + B(n, n+1)}{A(n, n+1) + B(n, n+1) + C(n, n+1)},$$

где

$$A(n, n+1) = P[(\theta \leq n) | \eta_1^n] f_0(\eta_{n+1});$$

$$B(n, n+1) = P[(n+1) | \eta_1^n] f_1(\eta_{n+1});$$

$$C(n, n+1) = P\{[\theta \leq (n+1)] | \eta_1^n\} f_0(\eta_{n+1}),$$

причем индексы 0 и 1 означают отсутствие и наличие сигнала в момент  $(n+1)$  соответственно.

Необходимые при этом апостериорные вероятности могут быть получены с помощью выражения для  $P(\theta | \eta_1^n)$ :

$$P[(n+1)|\eta_1^n] = \frac{f_1(\eta_{n+1})}{f_0(\eta_{n+1})} \frac{P(n+1)}{P(\theta > n)} (1 - \pi_n);$$

$$P[\theta > (n+1)|\eta_1^n] = 1 - P[(\theta \leq n)|\eta_1^n] - P((n+1)|\eta_1^n).$$

Обозначив  $\varphi_{n+1} = \frac{f_1(\eta_{n+1})}{f_0(\eta_{n+1})}$ , получим рекур-

рентное соотношение для  $\pi_{n+1}$  в виде

$$\pi_{n+1} = \frac{P(n+1)(1 - \pi_n)\varphi_{n+1} + P(\theta > n)\pi_n}{P(n+1)(1 - \pi_n)(\varphi_{n+1} - 1) + P(\theta > n)}.$$

Аналогично можно показать [8], что для

$$\pi_n^{(-)} = P[(\theta < n)|\eta_1^n];$$

$$\pi_n^{(0)} = P[(\theta = n)|\eta_1^n];$$

$$\pi_n^{(+)} = P[(\theta > n)|\eta_1^n]$$

справедливы рекуррентные соотношения

$$\pi_{n+1}^{(-)} = \frac{P(n)\varphi_n + P(\theta > n)\pi_n^{(-)}}{P(n+1)[1 - \pi_n^{(-)}](\varphi_{n+1} - 1) + P(\theta > n) + P(n)\varphi_n};$$

$$\pi_{n+1}^{(0)} = \frac{\pi_n^{(0)}\varphi_{n+1} + P(n+1)}{\pi_n^{(0)}(\varphi_{n+1} - 1)P(n+1) + P(n)\varphi_n};$$

$$\pi_{n+1}^{(+)} = \frac{[P(\theta > n) - P(n+1)]\pi_n^{(+)}}{\pi_n^{(+)}(\varphi_{n+1} - 1)P(n+1) + P(\theta > n)}.$$

Приведенные рекуррентные соотношения получены в форме "сами через себя" ( $\pi_{n+1}^{(-)}$  через  $\pi_n^{(-)}$  и т. д.). Возможно их получение и в форме с одинаковыми знаменателями:

$$\begin{cases} \pi_{n+1}^{(-)} = P(\theta > n)[\pi_n^{(-)} + \pi_n^{(0)}]/Q; \\ \pi_{n+1}^{(0)} = P(n+1)\pi_n^{(+)}\varphi_{n+1}/Q; \\ \pi_{n+1}^{(+)} = P(\theta > n+1)\pi_n^{(+)}/Q; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \pi_1^{(-)} = 0; \\ \pi_1^{(0)} = P_1\varphi_1/[P_1(\varphi_1 - 1) + 1]; \\ \pi_1^{(+)} = P(\theta > 1)/[P_1(\varphi_1 - 1) + 1], \end{cases} \quad (5)$$

где  $Q = P(n+1)\pi_n^{(+)}(\varphi_{n+1} - 1) + P(\theta > n)$ .

*Пример 1.* Необходимо своевременно обнаружить сигнал величины  $r$ , задаваемый процессом

$$\chi_n = \begin{cases} 0, & n < \theta; \\ r, & n = \theta; \\ 0, & n > \theta. \end{cases}$$

Наблюдается величина

$$\eta_n = \chi_n + \sqrt{C_2} \cdot x_n, \quad x_n \sim N(0, 1),$$

где  $C_2$  – эффективное значение помехи.

Функция выигрыша имеет вид

$$W(v, \theta) = \begin{cases} 0, & v < \theta; \\ 1, & v = \theta; \\ 0, & v > \theta. \end{cases}$$

Моделирование проводилось при значениях параметров  $r = 1$ ,  $C_2 = 1$ ,  $N = 10$ . Значения  $P_n$  задавались табл. 1. Значения вероятностей событий определялись как

$$P(\theta > n) = P_{n+1} + P_{n+2} + \dots + P_{10};$$

$$P(\theta > n + 1) = P_{n+2} + P_{n+3} + \dots + P_{10}.$$

Таблица 1

$n$	$P_n$	$n$	$P_n$
1	0.001	6	0.450
2	0.004	7	0.035
3	0.010	8	0.010
4	0.035	9	0.004
5	0.450	10	0.001

Решение о поступлении сигнала принималось по достижению статистиками  $\pi_n^{(0)}$  и  $\Omega_n = \pi_n^{(-)} + 2\pi_n^{(0)}$  своих границ.

Рекуррентные соотношения для выигрышей приняли вид (4), начальные условия – вид (5).

Отношение плотностей вероятностей

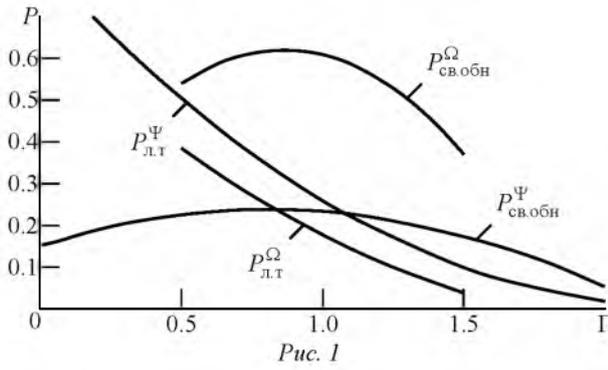
$$\varphi_n = e^{r\eta_n/C_2 - r^2/(2C_2)}.$$

*Байесовский вариант.* Рассчитанные методом обратной индукции значения границы  $\pi_n^{(0)}$  приведены в табл. 2. Вероятность ложной тревоги составила  $P_{л.т} = 0.192$ , вероятность своевременного обнаружения –  $P_{св.обн} = 0.613$ .

Таблица 2

$n$	$\pi_n^{(0)}$	$n$	$\pi_n^{(0)}$
1	0.615	6	0.035
2	0.615	7	0.010
3	0.615	8	0.004
4	0.615	9	0.001
5	0.450	10	0

*Модифицированный байесовский вариант.* В этом случае в качестве статистики принималась величина  $\Omega_n = \pi_n^{(-)} + 2\pi_n^{(0)}$ . Результаты моделирования – зависимости  $P_{св.обн}$  и  $P_{л.т}$  от постоянной границы  $\Gamma$ , не зависящей от момента



наблюдения, при использовании статистик<sup>2</sup>  $\Omega_n$  и  $\Psi_n = \ln \varphi_n$  представлены на рис. 1.

**Непрерывные измерения.** В варианте непрерывного времени наблюдаемое воздействие представляется процессом  $\eta_t$  с дифференциалом

$$d\eta_t = \chi_t dt + \sqrt{C_2} \cdot dw_t^{(n)},$$

где  $\chi_t$  – процесс, задающий сигнал продолжительности  $h$ ;  $w_t^{(n)}$  – винеровский процесс с  $M[w_t^{(n)}] = 0$ ;  $M[w_t^{(n)} - w_s^{(s)}]^2 = t - s$ , причем  $t, s$  – заданные моменты времени.

Процедура обнаружения остается прежней: вычисление  $\pi_n^{(0)} = P(v \in [\theta, \theta + h] | \eta_\theta^t)$  или  $\Omega_t$ , сравнение статистики с границей области остановки и принятие решения об обнаружении в момент достижения  $\pi_t^{(0)}$  границы.

Нахождение границы может быть сведено к решению уравнения

$$\hat{\pi}_t^{(0)} = P_{\theta > t + \hat{\Delta}}(v \in [\theta, \theta + h] | \hat{\pi}_t^{(0)}),$$

где  $P_{\theta > t + \hat{\Delta}}(\cdot)$  – вероятность своевременного обнаружения сигнала;  $\hat{\Delta}$  – шаг, с которым решается уравнение<sup>3</sup>.

Шаг  $\hat{\Delta}$  находится подбором в результате статистического эксперимента. Он должен быть таким, чтобы дальнейшее его уменьшение не влияло на результат.

При непрерывном времени для нахождения  $\pi_t^{(0)}$  или  $\Omega_t$  приходится применять более сложный (по

сравнению с дискретными измерениями) аппарат – стохастические дифференциальные уравнения.

Составление дифференциальных уравнений для  $\pi_t^{(0)}$  и  $\pi_t$  осложняется тем обстоятельством, что используемая для этого апостериорная плотность  $f(\theta | \eta_\theta^t)$  определяется по-разному в зависимости от интервала, к которому принадлежит начало воздействия сигнала:

$$f(\theta | \eta_\theta^t) = \begin{cases} \varphi_\theta^{\theta+h} \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} f(\theta), & \theta < t - h; \\ \varphi_\theta^t \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} f(\theta), & \theta \in [t - h, t]; \\ \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} f(\theta), & \theta > h, \end{cases}$$

где  $\varphi_\theta^t, \varphi_\theta^{\theta+h}$  – отношения правдоподобия [4] для различных (указанных в верхних индексах) интервалов.

Чтобы учесть это обстоятельство, А. Н. Ширяев предложил [4] ввести вспомогательные статистики  $\alpha_t$  и  $\beta_t$ , первая из которых характеризует наличие сигнала в прошлом, а вторая – присутствие сигнала в наблюдаемый момент времени [4].

В качестве статистик  $\alpha_t$  и  $\beta_t$  принимаются интегралы

$$\alpha_t = \int_0^{t-h} \varphi_\theta^{\theta+h} f(\theta) d\theta; \tag{6}$$

$$\beta_t = \int_{t-h}^t \varphi_\theta^t f(\theta) d\theta. \tag{7}$$

Тогда из соотношений

$$\pi_t^{(0)} = \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} \beta_t; \quad \pi_t = \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} (\alpha_t + \beta_t),$$

получаемых с помощью выражения для  $f(\theta | \eta_\theta^t)$ ,

следует возможность представления  $\pi_t^{(0)}$  и  $\eta_t$  в виде

$$\pi_t^{(0)} = \frac{\beta_t}{\alpha_t + \beta_t + P(\theta > t)}; \quad \pi_t = \frac{\alpha_t + \beta_t}{\alpha_t + \beta_t + P(\theta > t)}.$$

При составлении дифференциальных уравнений для  $\alpha_t$  и  $\beta_t$  сначала составляются рекуррентные соотношения с малым временным шагом  $\Delta = t_{k+1} - t_k$  ( $k$  – номер очередного дискретного отсчета времени), а затем в результате предельного перехода  $\Delta \rightarrow 0$  получаются стохастические дифференциальные уравнения. При этом при разложении  $\varphi_t^{t+\Delta}$  в ряд необходимо учитывать члены

<sup>2</sup> Используемая статистика указана в верхнем индексе обозначений вероятностей на рис. 1.

<sup>3</sup> Как показали результаты моделирования, шаг  $\hat{\Delta}$  решения уравнения для определения границы может быть выбран существенно большим, чем шаг  $\Delta$  при численном решении дифференциальных уравнений с использованием метода Рунге-Кутты или второй итерации Пикара [8].

вида  $(\Delta\omega_t)^2$ , поскольку они имеют порядок  $\Delta$  (в среднеквадратичном смысле).

*Теорема 1.* Уравнение для  $\alpha_t$  (6) имеет вид

$$d\alpha_t = f(t-h)\varphi_{t-h}^t dt. \quad (8)$$

*Доказательство.* Для определения  $\alpha_{t+\Delta}$  в соответствии с (6) разобьем интервал интегрирования на два:  $0 \leq \theta < t-h$  и  $t-h \leq \theta < t+\Delta-h$ :

$$\alpha_{t+\Delta} = \int_0^{t-h} \varphi_{\theta}^{\theta+h} f(\theta) d\theta + \int_{t-h}^{t+\Delta-h} \varphi_{\theta}^{\theta+h} f(\theta) d\theta. \quad (9)$$

Для моментов времени  $t < h$   $\alpha_t = 0$ , поэтому первый интеграл в (9) равен нулю. В силу малости промежутка интегрирования во втором интеграле имеем:

$$\alpha_{t+\Delta} = \alpha_t + f(t-h)\varphi_{t-h}^t \Delta.$$

Устремив  $\Delta$  к нулю, получим уравнение для  $\alpha_t$  в виде (8).

*Теорема 2.* Уравнение для  $\beta_t$  (7) имеет вид

$$d\beta_t = \begin{cases} f(t) dt + (1/C_2) m_{\theta}(t) \beta_t d\eta_t, & t < h, \\ \left[ f(t) - f(t-h)\varphi_{t-h}^t \right] dt + \\ + (1/C_2) m_{\theta}(t) \beta_t d\eta_t, & t > h, \end{cases} \quad (10)$$

где  $m_{\theta}(t)$  – оценка сигнала в момент времени  $t$ .

*Доказательство.* По методике, аналогичной примененной при доказательстве теоремы 1, для моментов времени  $t < h$  значения  $\beta_{t+\Delta}$  могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \beta_{t+\Delta} &= \int_0^t \varphi_{\theta}^{t+\Delta} f(\theta) d\theta + \int_t^{t+\Delta} \varphi_{\theta}^{t+\Delta} f(\theta) d\theta = \\ &= \varphi_{\theta}^{t+\Delta} [\beta_t + f(t)\Delta]. \end{aligned} \quad (11)$$

В случае, когда помехой является "белый" шум, т. е. дифференциал наблюдаемого воздействия имеет вид

$$d\eta_t = \chi_t dt + \sqrt{C_2} \cdot dw_t^{(n)},$$

$\varphi_t^{t+\Delta}$  может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \varphi_t^{t+\Delta} &= e^{(1/C_2) m_{\theta}(t) \Delta \eta_t - [1/(2C_2)] m_{\theta}^2(t) \Delta} = \\ &= 1 + (1/C_2) m_{\theta}(t) \Delta \eta_t - [1/(2C_2)] m_{\theta}^2(t) \Delta + \\ &+ [1/(2C_2)] [m_{\theta}(t) \Delta \eta_t]^2 + 0(\Delta) = \\ &= 1 + (1/C_2) m_{\theta}(t) \Delta \eta_t, \end{aligned} \quad (12)$$

где член  $(\Delta \eta_t)^2$  заменен его средним значением  $C_2 \Delta$ , которое не зависит от того, содержит  $\eta_t$  сигнал или нет, и отброшены члены порядка  $0(\Delta)$ .

В результате подстановки (12) в (11) имеем:

$$\beta_{t+\Delta} = \beta_t + f(t)\Delta + (1/C_2) m_{\theta}(t) \beta_t \Delta \eta_t.$$

Наконец, устремив  $\Delta$  к нулю, придем к дифференциальному уравнению, записанному в первой строке (10).

Для моментов времени  $t > h$  значение  $\beta_{t+\Delta}$  может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \beta_{t+\Delta} &= \int_{t+\Delta-h}^{t+\Delta} \varphi_{\theta}^{t+\Delta} f(\theta) d\theta = \\ &= \int_{t-h}^t \varphi_{\theta}^{t+\Delta} f(\theta) d\theta + \int_t^{t+\Delta} \varphi_{\theta}^{t+\Delta} f(\theta) d\theta - \\ &- \int_{t-h}^{t+\Delta-h} \varphi_{\theta}^{t+\Delta} f(\theta) d\theta = \\ &= \varphi_{\theta}^{t+\Delta} [\beta_t + f(t)\Delta - f(t-h)\varphi_{t-h}^t \Delta]. \end{aligned}$$

Поступая далее аналогично предыдущему случаю, придем ко второму уравнению в (10).

Значения  $m_{\theta}(t)$  находятся в результате решения уравнений Калмана–Бьюси. Начальные условия в предположении, что интервал корреляции процесса  $\theta_t$  существенно меньше времени его воздействия, могут приниматься такими, какими они окажутся в результате решения уравнений, начиная с начала наблюдений.

Теперь, используя уравнения для  $\alpha_t$  и  $\beta_t$  и зависимости  $\pi_t^{(-)}$ ,  $\pi_t^{(0)}$ ,  $\pi_t^{(+)}$  от  $\alpha_t$  и  $\beta_t$ , можно составить уравнения непосредственно для  $\pi_t^{(-)}$ ,  $\pi_t^{(0)}$ ,  $\pi_t^{(+)}$ . Для этого следует воспользоваться формулой замены переменных (формула Ито [9]). Последняя утверждает, что если  $\mathbf{x}_t = \{x_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$  –  $n$ -мерный вектор, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(x_t, t) dt + \mathbf{b}(x_t, t) dw_t,$$

где  $\mathbf{a} = \{a_i\}$ ,  $\mathbf{b} = \{b_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$  – заданные векторы коэффициентов; функция  $y(\mathbf{x}_t, t)$  непрерывно дифференцируема по  $t$  и дважды непрерывно дифференцируема по  $\mathbf{x}_t$ , то  $y$  удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dy = \left( \frac{dy}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{dy}{dx_{t_i}} a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 y}{dx_{t_i} dx_{t_j}} b_i b_j \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_{t_i}} b_i dw_i.$$

Для получения уравнений относительно границ  $\pi_t^{(-)}$ ,  $\pi_t^{(0)}$ ,  $\pi_t^{(+)}$  с использованием рассмотренной формулы замены переменных Ито применяется вектор  $x_t = \{\alpha_t, \beta_t\}$ , а в качестве  $y$  рассматриваются искомые границы. В результате имеем:

$$\begin{aligned} d\pi_t^{(-)} &= \begin{cases} 0, & t < h; \\ \frac{f(t-h)}{P(\theta > t)} \varphi_{t-h}^t \pi_t^{(+)} dt - \frac{1}{C_2} m_\theta(t) \pi_t^{(-)} \pi_t^{(0)} \times \\ & \times [d\eta_t - m_\theta(t) \pi_t^{(0)} dt], & t < h; \end{cases} \\ d\pi_t^{(0)} &= \begin{cases} \frac{f(t)}{P(\theta > t)} \pi_t^{(+)} dt + \frac{1}{C_2} m_\theta(t) \pi_t^{(+)} \pi_t^{(0)} \times \\ & \times [d\eta_t - m_\theta(t) \pi_t^{(0)} dt], & t < h; \\ \frac{f(t) - f(t-h) \varphi_{t-h}^t \pi_t^{(+)} dt - \frac{1}{C_2} m_\theta(t) \pi_t^{(0)} \times \\ & \times [1 - \pi_t^{(0)}] [d\eta_t - m_\theta(t) \pi_t^{(0)} dt], & t \geq h; \end{cases} \\ d\pi_t^{(+)} &= -\frac{f(t)}{P(\theta > t)} \pi_t^{(+)} dt - \\ & - \frac{1}{C_2} m_\theta(t) \pi_t^{(+)} \pi_t^{(0)} [d\eta_t - m_\theta(t) \pi_t^{(0)} dt]. \end{aligned} \quad (14)$$

В частном случае, когда  $h \rightarrow \infty$ , уравнение для  $\pi_t = \pi_t^{(-)} + \pi_t^{(0)}$  принимает вид

$$d\pi_t = \frac{f(t)}{P(\theta > t)} (1 - \pi_t) dt + (1/C_2) m_\theta(t) \pi_t (1 - \pi_t) [d\eta_t - m_\theta(t) \pi_t dt].$$

Это уравнение при  $m_\theta(t) = r$  и

$$f(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < 0; \\ \lambda e^{-\lambda \theta}, & \theta \geq 0 \end{cases}$$

совпадает с выведенным для этих условий уравнением (4.149) в [4].

*Пример 2.* Рассмотрим своевременное обнаружение сигнала величины  $r$  продолжительностью  $h$ , существующего в интервале  $v \in [\theta, \theta + h]$ :

$$\chi_t = \begin{cases} 0, & t < \theta; \\ r, & t \in [\theta, \theta + h]; \\ 0, & t > \theta + h. \end{cases}$$

при

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(\theta)}} e^{-\frac{[\theta - M(\theta)]^2}{2D(\theta)}}$$

( $D$  – символ дисперсии) и

$$d\eta_t = \chi_t dt + \sqrt{C_2} \cdot dw_t^{(n)}.$$

Статистика  $\Omega = \pi_t^{(-)} + 2\pi_t^{(0)}$  находится в результате подстановки в данную формулу зависимостей, полученных решением уравнений  $\pi_t^{(-)}$  (13) и  $\pi_t^{(0)}$  (14) с начальными условиями  $\pi_0^{(-)} = \pi_0^{(0)} = 0$ ;  $\pi_0^{(+)} = 1$ :

$$\begin{aligned} \pi_{t_{k+1}}^{(-)} &= \begin{cases} 0, & t_k < h; \\ \pi_{t_k}^{(-)} + \frac{f(t_k - h)}{P(\theta > t_k)} \varphi_{t_k - h}^{t_k} \pi_{t_k}^{(+)} \Delta - \frac{1}{C_2} r \pi_{t_k}^{(-)} \pi_{t_k}^{(0)} \times \\ & \times [\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k} - r \pi_{t_k}^{(0)} \Delta], & t_k \geq h; \end{cases} \\ \pi_{t_{k+1}}^{(0)} &= \begin{cases} \pi_{t_k}^{(0)} + \frac{f(t_k)}{P(\theta > t_k)} \pi_{t_k}^{(+)} \Delta + \frac{1}{C_2} r \pi_{t_k}^{(+)} \pi_{t_k}^{(0)} \times \\ & \times [\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k} - r \pi_{t_k}^{(0)} \Delta], & t_k < h; \\ \pi_{t_k}^{(0)} + \frac{f(t_k) - f(t_k - h) \varphi_{t_k - h}^{t_k} \pi_{t_k}^{(+)} \Delta + \frac{1}{C_2} r \pi_{t_k}^{(0)} \times \\ & \times [1 - \pi_{t_k}^{(0)}] [\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k} - r \pi_{t_k}^{(0)} \Delta], & t_k \geq h; \end{cases} \\ \pi_{t_{k+1}}^{(+)} &= \begin{cases} \pi_{t_k}^{(+)} - \frac{f(t_k)}{P(\theta > t_k)} \pi_{t_k}^{(+)} \Delta - \frac{1}{C_2} r \pi_{t_k}^{(+)} \pi_{t_k}^{(0)} \times \\ & \times [\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k} - r \pi_{t_k}^{(0)} \Delta], \end{cases} \end{aligned}$$

где  $\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k} = \chi_{t_k} \Delta + \sqrt{C_2 \Delta} \cdot x_{t_{k+1}}^{(n)}$ ;  $x_{t_{k+1}}^{(n)} \sim N(0, 1)$ .

Для вычисления  $\pi_{t_k - h}^{(-)}$  сначала находятся

$$\Psi_{t_k}^{t_{k+1}} = \frac{1}{C_2} r (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}) - \frac{1}{2C_2} r^2 \Delta,$$

затем сумма  $\Psi_{t_k - h}^{t_k} = \Psi_{t_k - h}^{t_{k+1} - h} + \dots + \Psi_{t_k - 1}^{t_k}$  и, нако-

нец,  $\varphi_{t_k - h}^{t_k} = e^{\Psi_{t_k - 1}^{t_k}}$ .

*Байесовский вариант.* Рассчитанные методом обратной индукции для  $M(\theta) = 5$  с,  $D(\theta) = 0.38$  с<sup>2</sup>,  $h = 1$  с,  $r = 3$ ,  $C_2 = 0.4$  с,  $T = 10$  с значения границы  $\pi_t^{(0)}$  приведены в табл. 3. В результате моделирования получены вероятности ложной тревоги  $P_{л.т} = 0.142$  и своевременного обнаружения  $P_{св.обн} = 0.851$ .

Таблица 3

$t, с$	$\pi_n^{(0)}$	$t, с$	$\pi_n^{(0)}$
1	0.851	6	0.042
2	0.851	7	0.010
3	0.831	8	0.005
4	0.815	9	0.001
5	0.473	10	0

*Модифицированный байесовский вариант.* В этом случае в качестве статистики принималась величина  $\Omega_t$ . Результаты моделирования – зависимости вероятностей ложной тревоги  $P_{л.т}$  и своевременного обнаружения  $P_{св.обн}$  от статистики  $\Omega_t$  – представлены на рис. 2.

*Замечание.* Проведенное рассмотрение относилось к случаю, когда приращения винеровского процесса могли рассматриваться как

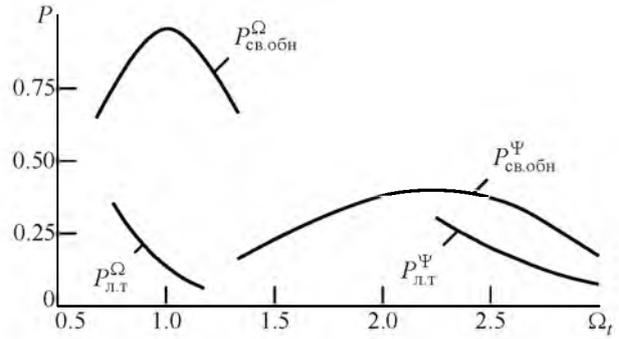


Рис. 2

$$\Delta w_t = \int_{t_k}^{t_{k+1}} u_s ds,$$

где  $u_s$  – широкополосный процесс типа "белого" шума.

Если же помеха узкополосная, то  $\Delta w_t$  может быть получено как решение уравнения, представляющее  $u_s$  методом так называемого заимствования [1].

В заключение следует отметить, что для заданных условий (распределения  $f(\theta)$ , продолжительности  $h$ , величины помех  $C_2$  и др.) составлена процедура обработки наблюдаемых воздействий, обеспечивающая достижение наибольшей вероятности обнаружения сигнала.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розов А. К., Царапкин А. Н. Метод обратной индукции в задачах обнаружения спонтанно возникающих явлений // Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2012. Вып. 3. С. 88–97.
2. Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И. Теория оптимальных правил остановки. М.: Наука, 1975. 168 с.
3. Урусов М. А. Об одном свойстве момента достижения максимума броуновским движением и некоторых задач оптимальной остановки // Теория вероятностей и ее применение. 2004. Т. 49, вып.1. С. 184–190.
4. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976. 271 с.
5. Snell I. L. Applications of martingale system theorems // Trans. Amer. math. soc. 1953. Vol. 73. P. 293–312.
6. Вальд А. Последовательный анализ / пер. с англ. М.: Физматгиз, 1960. 328 с.
7. Peskir G., Shiryaev A. N. Optimal stopping and free-boundary problems. Basel: Birkhauser, 2006. 500 p.
8. Розов А. К. Нелинейная фильтрация сигналов. СПб.: Политехника, 1994. 381 с.
9. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.

A. P. Los'

*Scientific and research institute of shipbuilding and armament of the RF navy*

A. K. Rozov, A. N. Tsarapkin

*RF naval academy*

## Optimum rule of detection of signals, arising in casual timepoints

*On the basis of the theory of optimum rules of a supervision stopping the detection algorithms possessing the greatest prize are developed. Difficulties of finding of optimum decisive procedures are shown. Two theorems of drawing up the stochastic differential equations are formulated and proved. Examples of possible application of the developed theory for discrete and continuous time are given.*

Optimum stopping rule, signal detection, losses, greatest prize, probability, differential equations

Статья поступила в редакцию 1 июня 2014 г.