

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесекерский В. А., Ефимов Н. Б., Зиятдинов С. И. Микропроцессорные системы автоматического управления. Л.: Машиностроение, 1988. 365 с.
2. Зиятдинов С. И., Осипов Л. А. Цифровая модель контура автокомпенсатора частоты Доплера помехового сигнала // Изв. вузов. Приборостроение. 2005. Т. 48, № 12. С. 21–24.
3. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.

S. I. Ziatdinov

Saint Petersburg State University of the Aerospace Instrumentation

Synthesis of the phase shifter for complex signal

It is proposed algorithm for construction of the phase shifter for complex signal, which gives any but constant the phase shift for square component in given range of the frequency. For rotation of the complex signal phase we must all him spectral components to shift on phase in assigned angle. It is showed, that the phase shifter of complex signal is be the complex filter, whose impulsive characteristic has the real and not real components. By the integral of imposition for concrete examples has been calculated the square components of complex output signal of the phase shifter.

Complex signal, phase shifter, phase shift, impulse characteristic

Статья поступила в редакцию 7 октября 2014 г.

УДК 621.396.1

В. Н. Ушаков

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина)

Спектральный подход к определению условий применения теоремы Котельникова

Рассмотрены особенности применения теоремы Котельникова в отношении сигналов с финитным спектром, у которых значение спектральной плотности на верхней граничной частоте отлично от нуля. Проанализирован феномен дискретизации гармонического колебания в случае, когда частота дискретизации равна удвоенной верхней частоте в спектре сигнала.

Теорема Котельникова, дискретизация

Анализируя формулировки теоремы Котельникова, приведенные, например, в [1], [2], легко заметить, что они не дают однозначного ответа на вопрос о том, может ли в финитном спектре $\hat{S}(\omega)$ квадратично интегрируемого сигнала $S(t)$ содержаться компонент с частотой ω_m , ограничивающей сверху указанный спектр. Так, при одинаковом значении минимального интервала дискретизации $T = \pi/\omega_m$ в [1] на поставленный вопрос дается отрицательный ответ, а в [2] – ему противоположный. Обращение к [3] не проясняет ситуации, поскольку в отношении сигнала $S(t)$ предполагается, что это есть функция, "состоящая из частот от 0 до ω_m ".

Еще более остро этот вопрос встает при рассмотрении гармонических колебаний, не облада-

ющих конечной энергией. В частности, в [4] в качестве примера дискретизации непрерывного сигнала с ограниченным спектром приводится представление отсчетными значениями функции $S(t) = \cos(\omega_m t)$. Отсчеты следуют с интервалом $T = \pi/\omega_m$ и берутся в точках, где $S(t) = \pm 1$, что в принципе позволяет восстановить исходное колебание. С другой стороны, условия теоремы Котельникова накладывают ограничения лишь на величину интервала дискретизации T , допуская формирование отсчетов в произвольные моменты времени. При этом рассматриваемое колебание $S(t) = \cos(\omega_m t)$ при сохранении предписанного теоремой периода дискретизации может быть представлено последовательностью нулевых отсчетов, не позволяющих

осуществить процедуру восстановления, несмотря на ограниченность спектра сигнала и правильный выбор интервала дискретизации. Следовательно, в этом случае возникают сомнения в корректности использования теоремы Котельникова.

Математическая сторона данного вопроса освещена в [5], где на базе теории целых функций рассмотрены различные обобщения теоремы Котельникова. Установлено, в частности, что при ее применении к квадратично интегрируемым функциям спектральный компонент с частотой ω_m может содержаться в ограниченном спектре исходного сигнала. Отмечено также, что условие интегрируемости квадрата функций является несколько искусственным, поскольку приводит к исключению из рассмотрения сигналов вида $\sum_k C_k \exp(i\omega_k t)$, где $k = 0, \pm 1, \dots$ и $|\omega_k| \leq \omega_m$.

В [5] приведена теорема в отношении класса сигналов, не удовлетворяющих данному условию, но являющихся ограниченными на вещественной оси. Очевидно, к этому классу принадлежит и указанная сумма. Доказано, что в таком случае колебание с частотой $\omega_k = \omega_m$ не может входить в состав исходного спектра, если только интервал дискретизации выбран из условия $T = \pi/\omega_m$.

Формально данный результат запрещает применение теоремы Котельникова к гармоническому колебанию с частотой ω_m при $T = \pi/\omega_m$, что, как было отмечено, осуществлено в [4]. Однако он не дает объяснения описанному феномену дискретизации гармонического колебания, когда в зависимости от выбора начального момента времени при дискретизации колебание затем либо можно, либо нельзя восстановить.

Это удастся сделать при использовании спектрального подхода для выяснения роли колебания верхней граничной частоты в спектре дискретизируемого сигнала, в чем и заключается цель настоящего сообщения.

Рассмотрим случай, когда в спектре дискретизируемого сигнала содержится гармоническое колебание единичной амплитуды $S(t) = \cos(\omega_m t + \varphi)$, где ω_m – верхняя граничная частота спектра; φ – начальная фаза. Как известно [2], спектральная плотность данного колебания на языке обобщенных функций имеет вид

$$\dot{S}(\omega) = \pi \left[\exp(i\varphi) \delta(\omega - \omega_m) + \exp(i\varphi) \delta(\omega + \omega_m) \right], \quad (1)$$

где $\delta(\omega)$ – дельта-функция. Дискретизированный сигнал $S_d(t)$, соответствующий исходному гармоническому колебанию, может быть записан [1] следующим образом

$$S_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(t) \delta(t - kT). \quad (2)$$

Спектральная плотность $S_d(\omega)$ дискретизированного сигнала есть результат суммирования периодически повторяющихся спектральных плотностей исходного колебания [1]–[3]

$$\dot{S}_d(\omega) = (1/T) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega - n2\pi/T). \quad (3)$$

Модуль $S(\omega)$ и аргумент $\arg \dot{S}(\omega)$ спектральной плотности колебания $S(t)$ представлены на рис. 1 и 2 соответственно. Легко видеть, что при суммировании согласно (3) вклад в колебания на частотах $\pm\omega_m$ дадут лишь слагаемые, соответствующие $n = 0, \pm 1$. На данных частотах будем иметь

$$\dot{S}_d(\pm\omega_m) = (2\pi/T) \cos(\varphi) [\delta(\omega \mp \omega_m)].$$

Часть спектральной плотности дискретизированного сигнала $\dot{S}'_d(\omega)$, сконцентрированная в полосе частот $|\omega| \leq \omega_m$, при этом примет вид

$$\dot{S}'_d(\omega) = (2\pi/T) \cos(\varphi) [\delta(\omega - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_m)]. \quad (4)$$

Сопоставив (1) и (4) и не принимая во внимание несущественный постоянный множитель $2/T$,

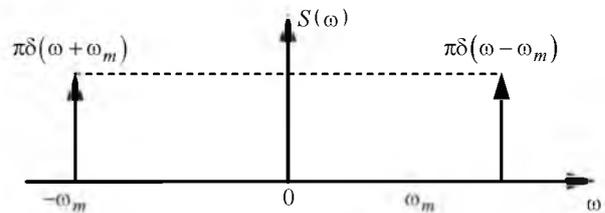


Рис. 1

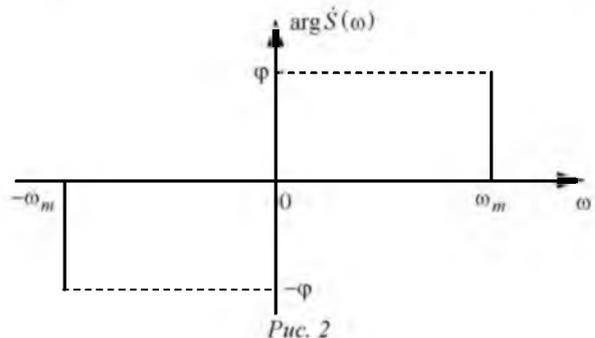


Рис. 2

обусловленный как различием размерностей сигналов $S(t)$ и $S_d(t)$, что следует из (2), так и наложением спектров $\tilde{S}(\omega - n2\pi/T)$, можно сделать вывод: в результате восстановления исходного непрерывного сигнала путем низкочастотной фильтрации в полосе частот $|\omega| \leq \omega_m$ потери информации будут отсутствовать в единственном случае, когда $\varphi = 2\pi m$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, т. е. $S(t) = \cos(\omega_m t)$. При любых других значениях φ исходное колебание не может быть восстановлено, а в характерном случае, когда $\varphi = \pm\pi/2 + 2\pi m$ и $S(t) = \pm \sin(\omega_m t)$, $S'_d(\omega)$ обращается в 0, что естественно для последовательности нулевых отсчетов, представляющей собой результат дискретизации данного колебания.

Таким образом, спектральный подход к определению условий применения теоремы Котельникова для представления квадратично-неинтегрируемых сигналов действительно позволяет дать наглядную трактовку роли колебания верхней граничной частоты в спектре дискретизируемого сигнала. Кроме того, с его помощью легко видеть, что в случае дискретизации сигналов с ограниченной энергией с периодом $T = \pi/\omega_m$ можно допустить, чтобы $S(\omega_m) \neq 0$, поскольку рассмотренная ранее интерференция спектральных компонентов на частотах $\pm\omega_m$, имеющая место и в данном случае, не играет никакой роли вследствие бесконечно малых значений соответствующих амплитуд. Это обстоятельство и нашло отражение в нескольких различных формулировках теоремы Котельникова в [1], [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.
2. Радиотехнические цепи и сигналы / под ред. К. А. Самойло. М.: Радио и связь, 1982. 528 с.
3. Котельников В. А. О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи. М.: Изд-во Управления связи РККА, 1933. 19 с.
4. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высш. шк., 1983. 535 с.
5. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Фinitные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971. 408 с.

V. N. Ushakov

Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI"

Spectral approach to determination of Kotelynikov's theorem application conditions

Kotelynikov's theorem application details are discussed for the case of signals with finite spectrum, when spectrum density at the high-frequency cutoff is nonzero. Phenomena of harmonic signal sampling when sampling frequency is twice more than the upper frequency in signal spectrum is analyzed.

Kotelynikov's theorem, signal sampling

Статья поступила в редакцию 9 декабря 2015 г.