

9. А. с. 1098399 СССР, МПК<sup>6</sup> G01S7/36. Устройство адаптивной режекции пассивных помех / Д. И. Попов; опубл. 20.12.98. Бюл. № 35.

10. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи: в 2 т. М.: Сов. радио, 1961–1962. Т. 1. 1961. 782 с.; Т. 2. 1962. 832 с.

D. I. Popov  
Ryazan State Radio Engineering University

### Invariant Processing of Multifrequency Signals

*The multifrequency signal processing algorithm that is invariant to the values of Doppler phase components of multifrequency signals have been synthesized. The analysis of the detection characteristics of the respective system conducted that allows to determine the theoretical limit of improvement of real systems of this class, and the direction of the search for new systems.*

Doppler phase, multifrequency signals, signals processing, clutter

Статья поступила в редакцию 30 ноября 2015 г.

УДК 681.514

С. И. Зиатдинов  
Санкт-Петербургский государственный университет  
аэрокосмического приборостроения

## Анализ ошибок узкополосного приема частотно-модулированных сигналов

*Показано, что ограничение полосы пропускания при приеме частотно-модулированного сигнала приводит к нежелательным изменениям как амплитуды, так и частоты выходного сигнала, значения которых зависят от значения индекса угловой модуляции.*

### Частотная модуляция, спектр сигнала, узкополосный прием, ошибки

Частотная модуляция (ЧМ) относится к распространенному методу передачи сообщений по информационному каналу. Исследованиям искажений частотно-модулированного колебания при прохождении через колебательную систему посвящено множество работ (см., например, [1]–[3]). Однако в данных работах с целью недопущения динамических искажений, связанных с конечной полосой пропускания линейной системы, рассмотрен лишь случай медленного изменения частоты входного сигнала.

Напротив, в настоящей статье использован спектральный метод анализа прохождения ЧМ-сигнала через линейную систему, который можно без ограничений применять как при медленных, так и быстрых изменениях частоты.

ЧМ-сигналы характеризуются столь большим числом спектральных составляющих в используемой полосе частот, что применение спектрального метода сопряжено с большими, иногда непреодолимыми трудностями вычисления. Однако современные вычислительные средства полностью снимают все трудности обработки большого числа спектральных составляющих в выходном сигнале.

При ЧМ частота несущего сигнала  $\omega(t)$  изменяется по закону передаваемого сообщения  $s(t)$ :  $\omega(t) = \omega_0 + ks(t)$ , где  $\omega_0$  – частота немодулированного несущего сигнала;  $k$  – коэффициент пропорциональности.

При этом полная фаза ЧМ-сигнала записывается следующим образом:

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(l) dl = \omega_0 t + \Delta\theta(t), \quad (1)$$

где  $\Delta\theta(t) = \int_0^t ks(l) dl = \Delta\varphi(t) + \varphi_0$ , причем  $\Delta\varphi(t)$  – изменение фазы несущего сигнала вследствие ЧМ;  $\varphi_0$  – начальная фаза.

В результате для ЧМ несущего сигнала можно записать выражение

$$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + \Delta\varphi(t) + \varphi_0], \quad (2)$$

где  $U_m$  – амплитуда сигнала.

В [1] показано, что спектр ЧМ-сигнала бесконечно широкий. Следовательно, при конечной ширине полосы пропускания приемного устройства часть спектральных составляющих входного сигнала не проходит на выход и возникают ошибки. В результате наблюдаются паразитные изменения как амплитуды, так и частоты принимаемого сигнала.

В настоящей статье проанализированы ошибки узкополосного приема ЧМ-сигнала.

При произвольной форме модулирующего сигнала  $s(t)$  решить поставленную задачу чрезвычайно сложно. Поэтому для получения в явном виде математических выражений рассмотрим случай ЧМ несущего сигнала гармоническим колебанием  $s(t) = S_m \cos \Omega t$  с амплитудой  $S_m$  и частотой  $\Omega$ .

Согласно (1) в этом случае полная фаза ЧМ-сигнала определяется выражением

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \omega_0 t + (kS_m/\Omega) \sin(\Omega t) + \varphi_0 = \\ &= \omega_0 t + m \sin(\Omega t) + \varphi_0, \end{aligned}$$

где  $m = kS_m/\Omega$  – индекс угловой модуляции.

Тогда (2) принимает вид

$$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + m \sin(\Omega t) + \varphi_0]. \quad (3)$$

Найдем спектр сигнала (3). Для упрощения преобразований положим начальную фазу равной нулю ( $\varphi_0 = 0$ ).

После несложных преобразований (3) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos[m \sin(\Omega t)] \cos(\omega_0 t) - \\ &- U_m \sin[m \sin(\Omega t)] \sin(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (4)$$

Входящие в (4) сомножители  $\cos[m \sin(\Omega t)]$  и  $\sin[m \sin(\Omega t)]$  являются периодическими функциями времени и могут быть разложены в ряды Фурье [1]:

$$\begin{aligned} \sin[m \sin(\Omega t)] &= 2J_1(m) \sin(\Omega t) + \\ &+ 2J_3(m) \sin(3\Omega t) + 2J_5(m) \sin(5\Omega t) + \dots; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \cos[m \sin(\Omega t)] &= J_0(m) + \\ &+ 2J_2(m) \cos(2\Omega t) + 2J_4(m) \cos(4\Omega t) + \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $J_n(\cdot)$  – функция Бесселя первого рода  $n$ -го порядка от аргумента  $m$ .

После подстановки соотношений (5) и (6) в (4) получим

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m [J_0(m) \cos(\omega_0 t) - \\ &- 2J_1(m) \sin(\Omega t) \sin(\omega_0 t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 2J_2(m) \cos(2\Omega t) \cos(\omega_0 t) - \\ &- 2J_3(m) \sin(3\Omega t) \sin(\omega_0 t) + \dots]. \end{aligned}$$

Перейдя от произведений тригонометрических функций к их суммам, получим:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t) = \\ &= U_m \{ J_0(m) \cos \omega_0 t + \\ &+ J_1(m) [\cos(\omega_0 + \Omega)t - \cos(\omega_0 - \Omega)t] + \\ &+ J_2(m) [\cos(\omega_0 + 2\Omega)t - \cos(\omega_0 - 2\Omega)t] + \\ &+ J_3(m) [\cos(\omega_0 + 3\Omega)t - \cos(\omega_0 - 3\Omega)t] + \\ &+ J_4(m) [\cos(\omega_0 + 4\Omega)t - \cos(\omega_0 - 4\Omega)t] + \\ &+ \dots \}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (7) следует, что при ЧМ спектр сигнала состоит из бесчисленного количества боковых частот  $\omega_n = \omega_0 \pm n\Omega$ , где  $n$  – целое число. При этом амплитуда каждой гармоники определяется как  $A_n = J_n(m)U_m$  и зависит от индекса модуляции  $m$ .

При ограниченной полосе пропускания приемного устройства на выход пройдут не все спектральные составляющие входного ЧМ-сигнала, что приведет к нежелательным изменениям амплитуды и частоты выходного сигнала.

Рассмотрим частный случай, когда приемное устройство обладает прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой с коэффициентом передачи в полосе прозрачности, равным единице, и нулевым фазовым сдвигом. В результате выходной сигнал приемного устройства можно записать следующим образом:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \sum_{n=0}^N J_n(m) \cos(\omega_0 \pm n\Omega)t, \quad (8)$$

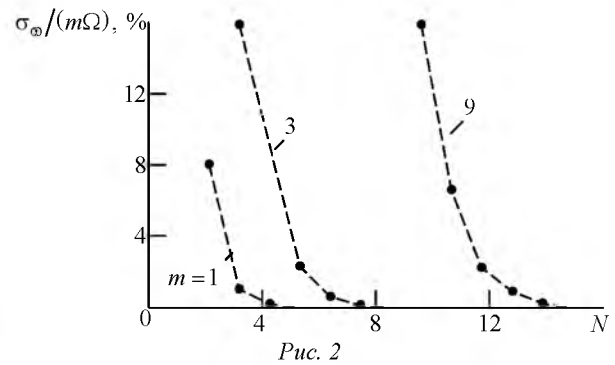
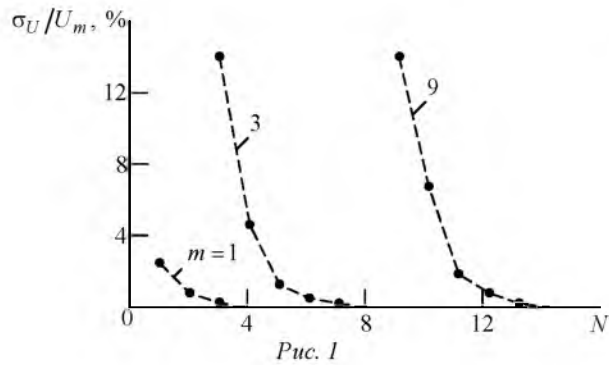
где  $N$  – количество учитываемых пар гармоник в выходном сигнале приемного устройства.

При этом квадратурный сигнал будет определяться соотношением

$$u_{\text{ВЫХ}}^*(t) = \sum_{n=0}^N J_n(m) \sin(\omega_0 \pm n\Omega)t. \quad (9)$$

С учетом (8) и (9) формулы для амплитуды и частоты выходного сигнала примут вид

$$\begin{aligned} U_{\text{ВЫХ}}(t) &= \sqrt{[u_{\text{ВЫХ}}(t)]^2 + [u_{\text{ВЫХ}}^*(t)]^2}; \\ \omega_{\text{ВЫХ}}(t) &= \frac{u_{\text{ВЫХ}}(t) \frac{du_{\text{ВЫХ}}^*(t)}{dt} - u_{\text{ВЫХ}}^*(t) \frac{du_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt}}{U_{\text{ВЫХ}}^2(t)}. \end{aligned}$$



Отклонения амплитуды и частоты выходного сигнала от амплитуды и частоты входного сигнала определим как

$$\Delta U(t) = U_m - U_{\text{ВЫХ}}(t); \Delta \omega(t) = \omega(t) - \omega_{\text{ВЫХ}}(t).$$

В результате среднеквадратические отклонения амплитуды и частоты выходного сигнала приемного устройства от амплитуды и частоты входного сигнала определяются соотношениями:

$$\sigma_U = \sqrt{M\{\Delta U(t) - M[\Delta U(t)]\}^2};$$

$$\sigma_{\omega} = \sqrt{M\{\Delta \omega(t) - M[\Delta \omega(t)]\}^2},$$

где  $M\{\}$  – среднее значение отклонения амплитуды или частоты.

На рис. 1 и 2 показаны зависимости относительных среднеквадратических отклонений  $\sigma_U/U_m$  и  $\sigma_{\omega}/(m\Omega)$  от количества учитываемых пар гармоник выходного сигнала. Графики построены для трех значений индекса угловой модуляции  $m = 1, 3$  и  $9$ .

Из представленных результатов следует, что значение среднеквадратического отклонения как амплитуды, так и частоты выходного сигнала приемного устройства от амплитуды и частоты входного сигнала, меньшее 1 %, наблюдается для  $m = 9$  при  $N > 13$ , для  $m = 3$  при  $N > 6$  и, наконец, для  $m = 1$  при  $N > 3$ .

Если принять частоту модулирующего сигнала равной 1 кГц, то в рассматриваемом случае для индекса угловой модуляции  $m = 9$  полоса пропускания приемника  $\Delta f$  должна быть больше 26 кГц, для  $m = 3$  необходимо обеспечить  $\Delta f > 12$  кГц и для  $m = 1$  требуется  $\Delta f > 6$  кГц.

Таким образом, ограничение полосы пропускания при приеме ЧМ-сигнала приводит к нежелательным изменениям как амплитуды, так и частоты выходного сигнала, значения которых зависят от значения индекса угловой модуляции.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. 2-е изд. М.: Дрофа, 2006. 720 с.  
2. Манаев Е. И. Основы радиоэлектроники. 3-е изд. М.: Либроком, 2013. 512 с.

3. Иванов М. Т. Радиотехнические цепи и сигналы. СПб.: Питер, 2014. 334 с.

S. I. Ziatdinov

Saint Petersburg State University of the Aerospace Instrumentation

#### The error analysis of narrow-band receiving frequency-modulated signals

*It's showed that limitation of the stripe passing in the time of the reception the frequency-modulation signal leads to bad changes of amplitude and frequency in the exiting signal, value of which is depended from meaning of the angle modulation.*

Frequency-modulation, signal spectrum, reception in narrow stripe, mistakes

Статья поступила в редакцию 7 октября 2014 г.