

УДК 629.735.33+001.891.573

В. К. Орлов, В. С. Рамаданов
 Санкт-Петербургский государственный электротехнический
 университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина)

Использование дифференциально-геометрических методов для построения траекторий движущихся летательных аппаратов

Разработана простая математическая модель полета летательного аппарата для создания тестовых траекторий, используемых при моделировании работы различных навигационных систем. Приведен анализ известных способов получения траекторий. Предложен новый способ, основанный на моделировании движения с заданными параметрами по эквидистанте над поверхностью земного эллипсоида.

Траектория полета, движение по эквидистанте, моделирование полета, тестовые траектории

Современные алгоритмы обработки данных бортовых навигационных комплексов разрабатываются с учетом особенностей движения летательного аппарата (ЛА). Для оценки точности этих алгоритмов требуется всестороннее моделирование условий их работы. Первоочередной задачей моделирования является проверка работоспособности таких алгоритмов в условиях, максимально приближенных к реальным. Поэтому для отработки алгоритмов требуется наличие типовых тестовых траекторий полета ЛА, построенных с учетом реальных данных: параметров Земли, скорости полета, маневровых возможностей и т. д.

В настоящее время один из основных способов моделирования основан на физических принципах полета. Этот способ включает в себя отдельные математические модели: аэродинамическую ЛА, гравитационного поля Земли, атмосферы, набора управляющих воздействий (движение рулей, закрылков и т. д.). Модели данного класса описывают полет ЛА с аэродинамической точки зрения, обеспечивая высокую точность описания траектории в различных режимах полета. Такие модели разрабатываются довольно давно и с успехом находят широкое применение при проектировании новых типов самолетов, моделировании совместного воздушного движения, прохождения неоднородностей (воздушных ям, грозовых фронтов), в авиатренажерах для обучения или повышения квалификации пилотов.

Следует отметить, что описанный класс моделей весьма сложен, требует значительных вычислительных затрат и для задач исследования

радионавигационных систем является явно избыточным. Для таких задач информация об угле атаки, тангаже, угле сноса и прочих аэродинамических параметрах полета во многих случаях не представляет интереса. Имеет значение только информация о положении центра тяжести, скорости и направлении его перемещения. Поэтому представляется целесообразной разработка упрощенного варианта модели. В основу предложенного способа моделирования положено построение траектории движения ЛА на постоянной высоте над земным эллипсоидом при заранее заданных начальных параметрах и изменяемых во времени ускорениях. В этом случае все необходимые для расчета данные могут быть получены средствами дифференциальной геометрии.

Используемые системы координат. В качестве основной системы координат для расчетов примем геоцентрическую прямоугольную систему координат (ГПСК). Центр данной системы совмещен с центром Земли, ось Oz направлена к Северному полюсу, ось Ox – к пересечению экватора и Гринвичского меридиана, ось Oy достраивает систему координат до правосторонней (рис. 1).

Параметры движения ЛА (начальная скорость, ускорения и угловые скорости) задаются в местной прямоугольной системе координат (МПСК). Центр этой системы O_M расположен в центре тяжести ЛА. Ось $O_M z_M$ ориентирована по нормали к поверхности земного эллипсоида, ось $O_M x_M$ – по проекции вектора скорости на плоскость, касательную к поверхности эллипсоида, ось $O_M y_M$

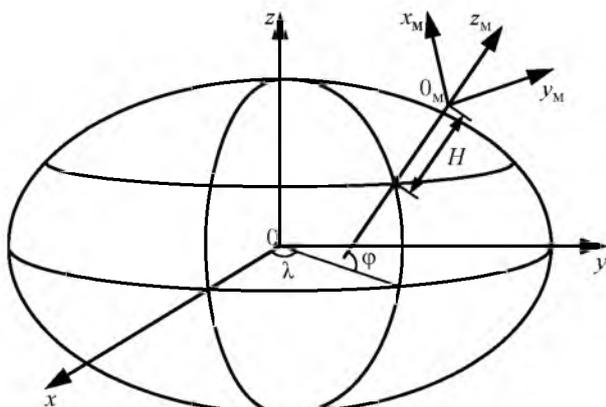


Рис. 1

добраивает МПСК до правосторонней. В дифференциальной геометрии такая система координат носит название естественной. Для получения МПСК необходимы координаты ЛА в ГПСК и путевой угол γ между направлением движения и местным меридианом (направлением на север).

Переход между ГПСК и МПСК может быть осуществлен с помощью поворота базисных векторов ГПСК [1]:

$$\mathbf{X}_M = M_y(\theta) \times M_z(\psi) \times \mathbf{X},$$

где

$$\mathbf{X}_M = \{x_M \ y_M \ z_M\}^T;$$

$$M_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix};$$

$$M_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– операторы поворота относительно осей Oy и Oz соответственно;

$$\mathbf{X} = \{x \ y \ z\}^T;$$

" \times " – символ векторного умножения; " T " – символ транспонирования.

Углы поворота координатных осей θ и ψ определяются как

$$\theta = \pi/2 - \varphi, \quad \psi = \pi + \lambda - \gamma,$$

где φ, λ – геодезическая широта и долгота местоположения ЛА соответственно.

Результаты моделирования для дальнейшего использования целесообразно выдавать в геодезической системе координат (ГСК), привязанной к параметрам Земли ПЗ-90.11 [1].

Кинематические уравнения движения летательных аппаратов. При описанном в статье

подходе к построению траектории ЛА его движение целесообразно рассматривать как сложное – сумму движения МПСК по эквидистантной поверхности и движения ЛА в МПСК. При таком способе описания может быть промоделирована любая траектория полета, любой маневр, вплоть до полета по спирали и т. п.

Векторное уравнение для скорости при сложном движении можно записать как

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} + \mathbf{v}_r, \quad (1)$$

где \mathbf{v} – вектор скорости в ГПСК; \mathbf{v}_0 – вектор скорости МПСК в ГПСК; $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{R}$ – вектор угловых скоростей и радиус-вектор вращения МПСК соответственно; \mathbf{v}_r – вектор скорости ЛА в МПСК. Первые два слагаемых в правой части (1) определяют переносную скорость ЛА, а последнее слагаемое имеет смысл относительной скорости. Вектор угловой скорости вращения МПСК $\boldsymbol{\omega}$ имеет две составляющие: задаваемую $\boldsymbol{\omega}_{\text{вн}}$ и обусловленную движением по эквидистанте $\boldsymbol{\omega}_r$:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\text{вн}} + \boldsymbol{\omega}_r.$$

Запишем дифференциальное уравнение (ДУ) движения ЛА в ГПСК. Проинтегрировав (1), после ряда несложных преобразований получим:

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} + \dot{\mathbf{v}}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ – угловое ускорение. Выражение (2), носящее также название теоремы Кориолиса [2], определяет абсолютное ускорение в сложном движении. Сумма первых трех слагаемых в правой части представляет собой переносное ускорение, четвертое слагаемое является относительным ускорением и пятое носит название добавочного (Кориолисова) ускорения.

Для получения траектории необходимо задать начальное положение ЛА: долготу, широту и высоту, начальную скорость, ускорение и вращение, а также определить $\boldsymbol{\omega}_r$ и \mathbf{R} , найти которые можно, зная кривизну траектории. Из дифференциальной геометрии известно, что длина радиус-вектора для эквидистанты больше на высоту H :

$$R_{eq} = R + H, \quad (3)$$

где $R_{eq} = |\mathbf{R}_{eq}|$ и $R = |\mathbf{R}|$ – длины радиус-векторов эквидистанты и кривой. Учитывая связь между длиной радиус-вектора и кривизной поверхности k : $R = 1/k$, выражение (3) можно записать как

$$k_{\text{eq}} = k / (kH + 1). \quad (4)$$

Кривизна подстилающей поверхности эллипсоида может быть найдена с помощью теоремы Эйлера [3]:

$$k = k_1 \cos^2 \gamma + k_2 \sin^2 \gamma, \quad (5)$$

где

$$k_1 = \sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3} / [a(1 - e^2)]; \quad (6)$$

$$k_2 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} / a$$

– главные кривизны, определяемые как кривизны по долготе и широте [4], причем a и e – большая полуось и эксцентриситет подстилающей поверхности, числовые значения которых могут быть взяты в [1].

Подставив (5) в (4) и затем в (2), для движения без углового ускорения ($\varepsilon = 0$) окончательно получим дифференциальное уравнение движения в виде

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (1/k_{\text{eq}}) \mathbf{n} + \dot{\mathbf{v}}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r, \quad (7)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к поверхности эллипсоида.

Решив уравнение (7) численными способами, например методом Рунге–Кутты [5], получим траекторию движения ЛА.

Алгоритм моделирования. Решение уравнения траектории (7) аналитическими методами крайне затруднено, особенно из-за неявной записи многих входящих в него величин. Поэтому решение ДУ (7) целесообразно получить численным методом. Для этого необходимо пройти несколько этапов (рис. 2):

1. Подготовка входных данных.
2. Описание ДУ (7).
3. Запуск решателя ДУ
4. Обработка результата работы решателя ДУ.

На первой стадии необходимо подготовить данные о начальном положении, направлении полета, скорости ЛА, а также задать ускорения и угловую скорость вращения $\omega_{\text{вн}}$. Далее на этапах 2 и 3 необходимо настроить решатель на требуемую точность, передать ему входные данные и уравнение траектории. После запуска решатель, согласно заложенным в него алгоритмам работы, самостоятельно определяет количество точек, удовлетворяющее заданной точности решения, и отыскивает траекторию. Выходными данными решателя являются расчетные векторы скорости и положения, а также соответствующие им моменты времени, не обязательно расположенные рав-

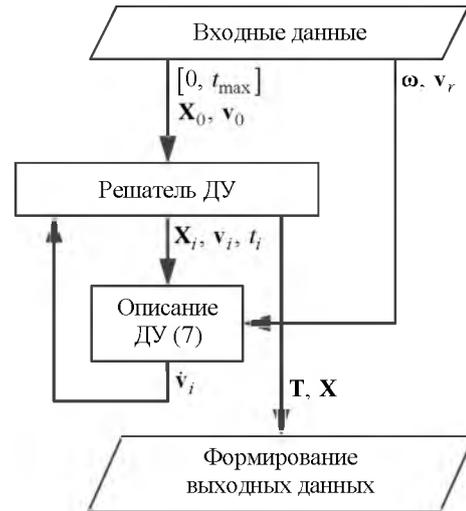


Рис. 2

номерно на временной оси. На последнем этапе эти данные преобразуются в удобный для дальнейшей работы формат: преобразуется система координат, в случае необходимости производится интерполяция (например, сплайном).

Одним из наиболее подходящих методов решения имеющегося уравнения траектории является метод Рунге–Кутты. Он относится к так называемым одношаговым методам, поскольку для расчета решения на текущем шаге требуется только решение на предыдущем шаге [5]. Это определяет способ описания решаемого ДУ. К преимуществам выбранного метода решения следует отнести высокую проработанность данного метода, простоту его реализации с использованием встроенных в математические пакеты функций, отлаженных, имеющих хорошую документацию и реализующих различные вариации данного метода.

Рассмотрим подробнее описание этапа "Описание ДУ". Задачей этого блока является представление уравнения (7) в виде, пригодном для решателя. ДУ описывается в несколько этапов, так как в уравнение входит множество величин и параметров, требующих отдельного расчета на каждом шаге. Структурная схема блока, включающая в себя все предварительные расчеты по (3)–(6), приведена на рис. 3. При составлении этой схемы особое внимание уделялось способам передачи данных, что способствует лучшему пониманию принципов построения алгоритма.

Пример моделирования. Проиллюстрируем работу описанного метода моделирования на практическом примере. Рассмотрим случай совместного полета двух ЛА: пусть первый летит на север с постоянной скоростью $v_1 = 374$ м/с, а второй, изначально находясь позади первого, летит в том же направлении с в два раза большей

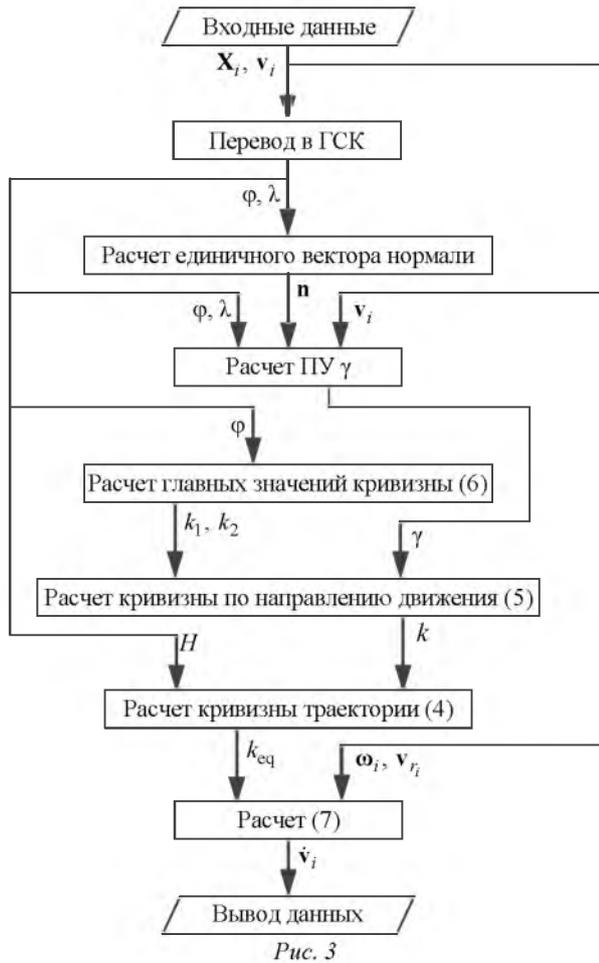


Рис. 3

скоростью $v_2 = 748$ м/с. Поравнявшись с первым ЛА, второй совершает полный оборот за 50 с. Весь моделируемый полет длится 100 с, встреча происходит через 51 с. Полученные траектории в плане с привязкой к координатной сетке φ, λ ГСК ПЗ-90.11 [1] приведены на рис. 4.

Для расчета траекторий первого и второго ЛА по (7) была использована функция ode45, ответственная за реализацию метода Рунге–Кутты в пакете MATLAB [6]. Для расчета первой траектории выбранной функции потребовалась 41 точка, для второй, более сложной, траектории – 89 точек.

На рис. 5 приведены зависимости от времени расстояния между ЛА (ΔH), широты φ и долготы λ первого ЛА (сплошные линии) и второго ЛА (штриховые линии). Приведенным примером полностью иллюстрируются возможности разработанного метода моделирования траекторий полета ЛА.

В настоящей статье продемонстрирован альтернативный подход к построению траекторий полета ЛА, основанный не на аэродинамическом моделировании, а на принципах дифференциальной геометрии. Моделирование полета как движения по эквидистантной земному эллипсоиду

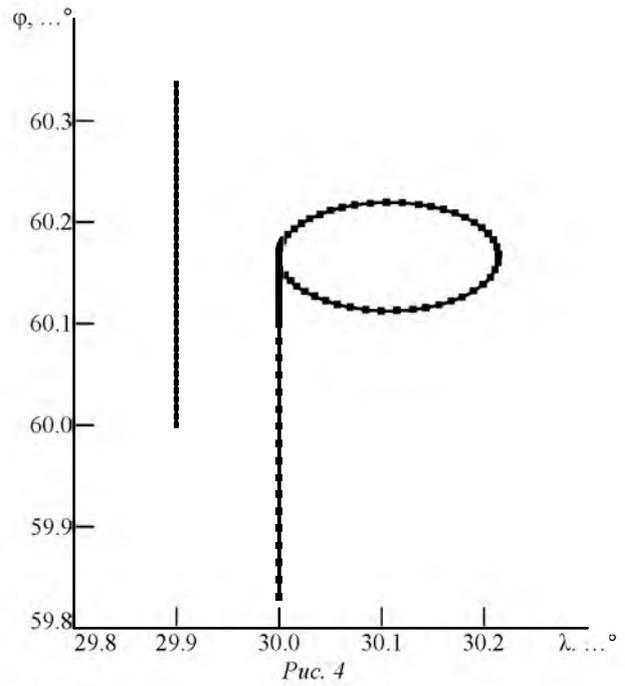


Рис. 4

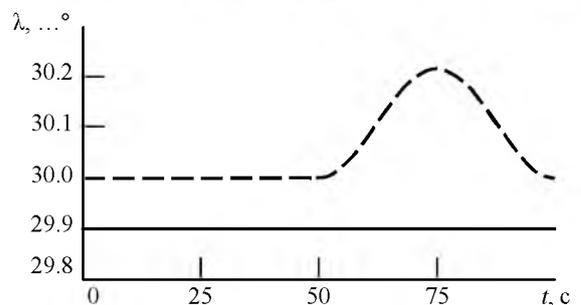
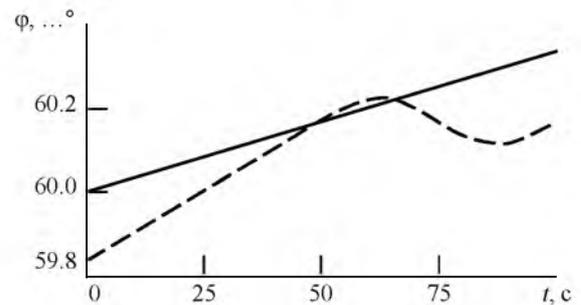
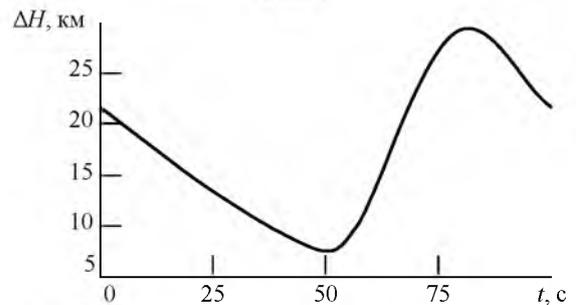


Рис. 5

кривой позволило избежать излишней сложности модели путем удаления из нее моделей атмосферы, гравитационного поля и прочего. Благодаря этому удалось уменьшить время моделирования, снизить требования к вычислительной мощности

ЭВМ, уменьшить количество входных данных и упростить поиск возможных ошибок. Отказ от аэродинамического моделирования сделал невозможным получение информации о крене, тангаже и других аэродинамических параметров полета, а также моделирование прохождения таких неод-

нородностей, как воздушные ямы, грозовые фронты. Однако для моделирования работы бортовых радиосистем (например, ближней или дальней навигации) это не имеет принципиального значения, т. е. разработанная модель удовлетворяет поставленным при разработке целям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90.11): справочный документ / Военно-топографическое управление Генерального штаба Вооруженных сил РФ. М., 2014. 52 с.
2. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для вузов. 10-е изд. М.: Высш. шк., 1986. 416 с.
3. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. 6-е изд. М.: Наука, 1974. 176 с.

4. Закатов П. С. Курс высшей геодезии. 4-е изд. М.: Недра, 1976. 511 с.
5. Бахвалов Н. С. Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы: учеб. пособие. 7-е изд. М.: Бинном. Лаборатория знаний, 2011. 636 с.
6. URL: <http://mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html> (дата обращения 12.12.2015).

V. K. Orlov, V. S. Ramadanov

Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI"

Using of the differential geometric methods for constructing the aircraft moving trajectories

A simple mathematical model of the aircraft flying to create test trajectories is used for modeling the various navigation systems is developed. The analysis of the known methods for trajectories producing is provided. A new method based on the motion modeling with the set parameters after equidistant above the surface of Earth ellipsoid is offered.

Flight path, movement at equidistant, flight simulation, test trajectory

Статья поступила в редакцию 20 ноября 2015 г.